

# 「SPH 粒子法の基礎と応用」

横浜国立大学 教育人間科学部 教授 酒井 譲

### 4.3 SPH 法

#### 4-3-1 SPH 法の理論

SPH 法は、運動量保存則、エネルギー保存則などを表わす偏微分方程式を Kernel 積分式によって近似的に解く。SPH 法と、従来の Lagrangian 差分法との基本的な違いは、差分法が格子ベースの空間導関数の近似を用いるのに対して、SPH 法は内部にランダムに分布した点（粒子）より近似関数の構築を行うところにある。偏微分方程式を空間格子をもちいて積分する差分法などの格子ベースの方法では、隣接する粒子はそのまま固定され続けるが、SPH 法では評価点である粒子がランダムに分布し時間発展にしたがって移動する。このため SPH 法は格子ベースの Lagrangian 法では難しかった超大変形問題を扱うことが可能となるなど、従来の解析手法にはみられなかったいくつかの特色をもち、流体解析<sup>1)2)</sup>のみならず、個体の衝撃解析<sup>3)4)</sup>、大変形解析<sup>5)</sup>、熱伝導解析<sup>6)</sup>など多くの分野への適用研究が進展しつつある。

##### (1) Kernel 近似

SPH 法は、物体を有限個の粒子と呼ばれる物体素片に分割し、その任意の点の集合を用いて近似を行うアルゴリズムを持つ。従って格子ベースの近似を行う必要がない。この方法の基礎概念は次の Kernel 変換式にある。

$$f(x) = \int f(x') \delta(x-x') dx' \quad (4.3.1)$$

ここで、 $f$  は三次元位置ベクトル  $x$  の関数であり、 $dx'$  は体積、 $\delta(x-x')$  はデルタ関数を表わす。ここで、このデルタ関数がある幅（領域） $h$  をもった適当な重み関数  $W(x-x',h)$  に置き換える、

$$f(x) \approx \int f(x') W(x-x',h) dx' \quad (4.3.2)$$

上式の右辺はある物理量  $f(x)$  を重み関数によって平均化した Kernel 評価となる。この一種の平均化を Smoothing とよび SPH 法の最も重要な概念である。

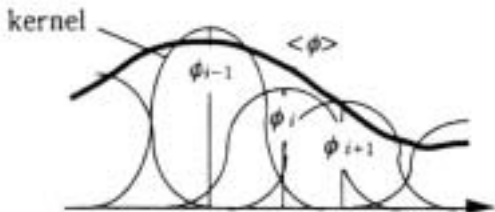


図4-3-1 カーネルによる重ね合わせ

図 4-3-1 にある物理量を重み関数（kernel）を用いて重ね合わせ、ある広がりを持った領域に滑らかに分布させる概念（Smoothing 化）をしめす。この操作により、評価点のもつ物理量は連続体の物理量に置き換えられる。言い換えれば粒子という、物質の孤立したモデルから連続体モデルへと Smoothing 化される。したがって SPH 粒子法は、個別要素法などの離散化した点群によるモデルではなく、連続体モデルとなり、粒子はあくまで Smoothing のための評価位置をしめす存在となることに注意を要する。

図4-3-2 に連続体を粒子場へ離散化したモデルをしめす。各々の粒子  $i$  は、ある長さ  $h$  内に存在する他の粒子  $j$  による相互作用を受ける。この一定距離  $h$  をスムージング長さと呼ぶ。

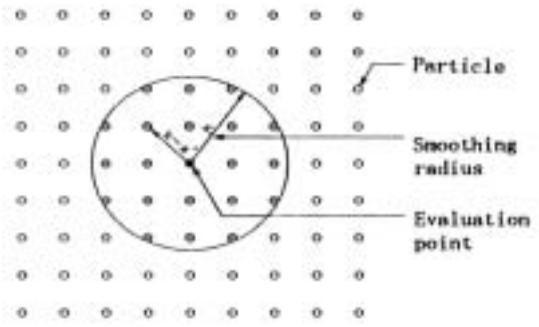


図4-3-2 連続体の離散化と影響半径

この図における粒子は物理量を評価する一種の評価点であり、有限要素法における節点と積分点の双方の役割をもった存在に近い。ここで  $W(x-x',h)$  は影響半径の内部に分布する多くの評価点の重み付けをおこなう関数であり以下のような性質を持たなければならない。

- 1) Kernel 関数の極限がデルタ関数である事

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(x-x',h) = \delta(x-x') \quad (4.3.3)$$

- 2) 規格化されている事

$$\int W(x-x',h) dx' = 1 \quad (4.3.4)$$

- 3) 影響半径の範囲以外で 0 になるコンパクト化が可能である事

$$W(x-x',h) = 0 \quad \text{for} \quad |x-x'| \geq h \quad (4.3.5)$$

さて、一般の偏微分方程式にふくまれる 1 階の空間微分は式(4.3.2)の  $f(x)$  を  $\int f(x') W(x-x',h) dx'$  で置換する事によって得られる。

$$\nabla \cdot f(x) \approx \int \nabla \cdot f(x') W(x-x',h) dx' \quad (4.3.6)$$

上式右辺の積分の中の発散(divergence)を部分積分すれば、

$$\nabla \cdot f(x') W(x-x',h) = \nabla \cdot (f(x') W(x-x',h)) - f(x') \cdot \nabla W(x-x',h) \quad (4.3.7)$$

であるから、 $\nabla \cdot f(x)$  は次式のように表わせる。

$$\nabla \cdot f(x) \approx \int \nabla \cdot (f(x') W(x-x',h)) dx' - \int f(x') \cdot \nabla W(x-x',h) dx' \quad (4.3.8)$$

上式右辺の最初の項は発散の定理に基づいて積分領域表面の積分に置き換える事ができ結局ゼロとなる。

$$\int \nabla \cdot (f(x') W(x-x',h)) dx' = \int_S f(x') W(x-x',h) \cdot \hat{n} dS = 0 \quad (4.3.9)$$

ここでは、重み関数の性質(4-3-5)式によって、積分境界上では重みがゼロとなることを利用し、結局表面積分はゼロとなる。したがって 1 階の空間微分式は次のように重み関数の空間微分のみによって表現できることになる。

$$\nabla \cdot f(x) \approx - \int f(x') \cdot \nabla W(x-x',h) dx' \quad (4.3.10)$$

ここで評価する物理量をもつ主体として、連続体を十分細かく分割した物質素片である粒子を考え、次のような式の操作をおこなう。

$$\int \phi(x') dx' = \int \left( \frac{\phi(x')}{\rho} \right) \rho dx' \quad (4.3.11)$$

$dx'$ は物質素片より作られる体積であると解釈され、したがって左辺の積分は内挿点（粒子）における要素成分の有限個の値を合計して近似することができる。

$$\int \phi(x') dx' \approx \sum_{J=1}^N \frac{\phi(x^J)}{\rho^J} m^J \quad (4.3.12)$$

ここで、上付きの指数は内挿点  $j$  での数値であり、内挿点の個数である  $N$  個の和を考える。この関係を用いて式(4-3-2)及び(4-3-10)を変形すると、以下ようになる。

$$f(x) \approx \sum_{J=1}^N \frac{m^J}{\rho^J} f(x^J) W(x-x^J, h) \quad (4.3.13)$$

$$\nabla \cdot f(x) \approx - \sum_{J=1}^N \frac{m^J}{\rho^J} f(x^J) \cdot \nabla W(x-x^J, h) \quad (4.3.14)$$

(4-3-14)式による1階微分の粒子場による近似値の連続性は、関数  $f(x^J)$ 、及び任意に離散化した内挿点より作られる重み関数の空間勾配の連続性から保証される。

SPH アルゴリズムの基礎となるのは(4.3.14)式で示された空間勾配の評価式である。言い換えれば Monaghan らによって提案されたSPH法は、偏微分方程式の空間勾配の直接近似を粒子場によって（Smoothing 概念を併用し）表現するものであるといえる。したがって(4.3.14)式はSPH法を適用する様々な問題に用いられる。あるいは同式を変形して求められる次のような関係式が用いられる事もある。

$$\nabla \cdot f(x') \approx \frac{1}{\rho'} \sum_{J=1}^N m^J (f(x') - f(x^J)) \cdot \nabla W(x-x^J, h) \quad (4.3.15)$$

また、微分操作により次に示す形式で利用される場合もある。

$$\nabla \cdot f(x') \approx - \frac{1}{\rho'} \sum_{J=1}^N m^J \left( \frac{f(x')}{(\rho')^2} + \frac{f(x^J)}{(\rho^J)^2} \right) \cdot \nabla W(x-x^J, h) \quad (4.3.16)$$

## (2) Kernel 関数

SPH 法では重み関数を領域積分型の近似解法に用いる（Kernel 近似）ある影響半径  $h$  の内部にある複数の粒子位置の物理量を中心位置の評価点に内挿する。したがってこの積分近似手法の精度は重み関数の精度に大きく依存する。重み関数には多数の候補があるが、よく利用されるのは次の3次 Spline 関数である。

$$W = \begin{cases} \frac{C}{h^D} \left[ 1 - \frac{3}{2} z^2 + \frac{3}{4} z^3 \right] & z < 1 \\ \frac{C}{4h^D} [2-z]^3 & 1 \leq z < 2 \\ 0 & z \geq 2 \end{cases} \quad (4.3.17)$$

ここで  $z$  は次のような代表長さである。

$$z = \frac{|x-x^J|}{h} \quad (4.3.18)$$

$D$  は問題の次元をあらわし、定数  $C$  は次のように与えられる。

$$C = \begin{cases} \frac{2}{3} & D = 1 \\ \frac{10}{7\pi} & D = 2 \\ \frac{1}{\pi} & D = 3 \end{cases} \quad (4.3.19)$$

Kernel 関数の微分形は以下の式ようになる。

$$\frac{\partial W(x-x')}{\partial x_j} = \frac{(x_j - x'_j)}{u} \frac{\partial W}{\partial u} = - \frac{\partial W(x-x')}{\partial x'_j} \quad (4.3.20)$$

$$\frac{\partial W}{\partial u} = \begin{cases} \frac{3C}{h^{D+1}} \left[ -z + \frac{3}{4} z^2 \right] & z < 1 \\ \frac{-3C}{4h^{D+1}} [2-z]^2 & 1 \leq z < 2 \\ 0 & z \geq 2 \end{cases} \quad (4.3.21)$$

Spline 関数の他にも以下の Exponential 型の Gauss 関数も宇宙物理学の分野などではしばしば使用される。

$$w.f. = \frac{1}{\pi h^2} \exp\left(-\frac{(x-x')^2}{h^2}\right) \quad (4.3.22)$$

## 4-3-2 SPH法による弾性解析

### (1) 解析理論

SPH法は宇宙物理学における圧縮性流体解析手法として提案され、その分野では現在でも最も有力な解析手法であるが、工学者の考える圧縮性流体とはやや性格が異なる。SPH法が工学の分野で最も早く適用されたのは、固体の高速衝突解析である。代表的な解析は、宇宙ステーションへの隕石衝突解析であり、構造物への固体の超高速衝突問題が弾性衝突問題として扱われた。

SPH法を弾性場の解析に利用するには、連続体場における応力勾配を用いた次の運動方程式を利用する手法が一般的である。

$$a = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \sigma \quad (4.3.23)$$

ここで、 $\sigma$  は応力テンソルを表わす。上式は応力に関する1階の空間微分を表しているから、SPH法の基本式(4.3.14)を使用することができる。また歪み速度テンソルも速度勾配により表現できる。

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.3.24)$$

いま式(4.3.14)を運動方程式に適用させると次式のように粒子  $i$  の加速度を計算する事ができる。

$$a_i^I = - \sum_{J=1}^N m^J \sum_{j=1}^3 \frac{\sigma_{ij}^J}{\rho^I \rho^J} \frac{\partial W}{\partial x_j^J} \quad (4.3.25)$$

もしくは(4.3.16)式を用いて次式のようになる。

$$a_i^I = - \sum_{J=1}^N m^J \sum_{j=1}^3 \left[ \left( \frac{\sigma_{ij}^J}{\rho^2} \right)^I + \left( \frac{\sigma_{ij}^J}{\rho^2} \right)^J \right] \frac{\partial W}{\partial x_j^J} \quad (4.3.26)$$

後者のほうは、粒子  $i$  が粒子  $j$  に及ぼす力が、その逆である粒子  $j$  が粒子  $i$  に及ぼす力に等しくなるという長所を持つ。従って運動量保存則がより厳密に保証される。式(4.3.14)より速度勾配を計算すると次式のようになる。

$$\left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right)^I = - \sum_{J=1}^N \frac{m^J}{\rho^J} V_i^J \frac{\partial W}{\partial x_j^J} \quad (4.3.27)$$

また式(4-3-15)を使うと次のような速度勾配を得る。

$$\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right)^I = -\frac{1}{\rho^I} \sum_{J=1}^N m^J (V_i^I - V_i^J) \frac{\partial W}{\partial x_j^J} \quad (4.3.28)$$

後者の関係式は粒子  $i$  粒子  $j$  間において速度が互いに等しいならば、歪み速度テンソルが 0 になるという長所を持つ。一般的に境界などの特殊な場合を除いて加速度及び速度勾配を求めるのにどちらを用いても大きな相違はない。

時間積分に関しては、多くの手法があるが、たとえばタイムステップを可変として解析する場合には次式のようなアルゴリズムが使用できる。

$$V_i^{I,n+\frac{1}{2}} = V_i^{I,n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left( \Delta t^{n+\frac{1}{2}} + \Delta t^{n-\frac{1}{2}} \right) a_i^{I,n} \quad (4.3.29)$$

$$x_i^{I,n+1} = x_i^{I,n} + \Delta t^{n+\frac{1}{2}} V_i^{I,n+\frac{1}{2}} \quad (4.3.30)$$

タイムステップを可変にするケースは、大規模解析において計算時間を短縮する場合に使用される。一般的にはタイムステップは固定し、オイラー型の時間積分を使用することができる。

弾性解析の流れは、運動方程式を解き、加速度、速度、変位をもとめ、速度場からひずみ場を求める。応力場はそのひずみ場から構成方程式を用いてもとめる。たとえば 2 次元平面応力場を仮定した場合は有限要素法と同様に

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [D_e] \{d\varepsilon\} \quad (4.3.31)$$

を用いて応力増分をもとめる。ただし、すべての物理量は評価点である粒子位置で保持される。

粒子法による弾性解析は超高速衝突解析に使用された。たとえば、隕石（秒速 5km/s レベル）が宇宙ステーションの金属壁に突入する事故を模擬するもので、金属壁を隕石が貫通する挙動が求められた。この解析では貫通孔の発生から壁の大規模な破壊まで、有限要素法では表現できない現象を粒子法により扱おうとしているところに特色がある。

## (2) 人工粘性

差分法などでは局所的に連続した流れの中だけで運動量、質量、エネルギー保存則を表しているため、定常流れの連続性からあらわれる振動や数値誤差から発生する解の振動を防ぐためには人工粘性が必要となる。この事情は S P H 法でも同様であり、従来の Lagrangian 有限差分法で用いられていた人工粘性応力の考え方を応用している。

S P H 法が提案された時期における、人工粘性の導入の目的は数値拡散の抑制をはかる手段のみではなく、超高速の圧縮性流体解析において衝撃波を有効に生じさせるために必要な手段にあった。すなわち S P H 法では人工粘性の扱いはきわめて重要であり、衝撃波の挙動を追及する宇宙物理学の分野では人工粘性の理論が展開されている。しかし S P H 法を構造問題に応用する立場では、人工粘性は数値拡散の制御手段と考えるとよく、ここでは簡単な紹介にとどめる。

S P H 法では、次のような密度に関する 2 次式の項を運動方程式に導入することで粘性を表現する。

$$Q = \rho B_1^2 l^2 \left( \frac{\dot{\rho}}{\rho} \right)^2 + \rho B_2 l C \left( \frac{\dot{\rho}}{\rho} \right) \quad (4.3.32)$$

ここで  $B_1, B_2$  は差分法ではそれぞれ 2 と 0.1 を与えることが多い。C は音速である。また  $l$  は代表長さでありこの場合は影響半径  $h$  である。この項を運動方程式に導入すると

$$a_i^I = -\sum_{J=1}^N m^J \sum_{j=1}^3 \left[ \left( \frac{\sigma_{ij} - Q \delta_{ij}}{\rho^2} \right)^I + \left( \frac{\sigma_{ij} - Q \delta_{ij}}{\rho^2} \right)^J \right] \frac{\partial W}{\partial x_j^J} \quad (4.3.33)$$

となる。この人工粘性の形式は差分法のものに近く理解しやすい形式であるが、この形式を用いても超高速衝突の場合には有効でなくなることがおおい。そこで以下のような人工粘性項が S P H 法では使用されている。

$$a_i^I = -\sum_{J=1}^N m^J \sum_{j=1}^3 \left[ \left( \frac{\sigma_{ij}}{\rho^2} \right)^I + \left( \frac{\sigma_{ij}}{\rho^2} \right)^J + \Pi^{\mu} \delta_{ij} \right] \frac{\partial W}{\partial x_j^J} \quad (4.3.34)$$

ここで

$$\Pi^{\mu} = \frac{\mu^{\mu} (\alpha C^{\mu} + \beta |\mu^{\mu}|)}{\rho^{\mu}} \quad (4.3.35)$$

ここで、 $\alpha$  は任意の係数で、 $\beta$  それぞれ 2.0 などが使用される。また C は音速である。ここで

$$\mu^{\mu} = \frac{h \sum_{j=1}^3 (V_j^I - V_j^J) (x_j^I - x_j^J)}{\left( (x^I - x^J) \right)^2 + h^2} \quad (4.3.36)$$

$$C^{\mu} = \frac{1}{2} (C^I + C^J) \quad (4.3.37)$$

$$\rho^{\mu} = \frac{1}{2} (\rho^I + \rho^J) \quad (4.3.38)$$

などである。 $Q^{\mu}$  の次元は応力  $\sigma_{ij}$  と同じであり、圧縮では負となる。 $\mu^{\mu}$  は応力を密度の二乗で割った次元を、 $\mu^{\mu}$  は速度の次元を持つ。人工粘性は宇宙物理における超高速衝突解析では衝撃波発生の重要な働きをするが、地上の衝突あるいは接触問題では数値振動を抑制する便宜的な役割である。しかし数値振動が大きな現象については、パラメータ  $\alpha, \beta$  を慎重に選択するべきである。

S P H 法による弾性解析は、高速衝突問題の分野から、現在では有限要素法などでおこなわれる通常の弾性構造解析に適用されつつある。弾性問題における S P H 法の利点は、メッシュレス解析手法である点にあり、3 次元複雑形状の構造物のデータ構造が非常に簡単に用意できる。ここで S P H 法特有の問題点を指摘しておく。それは境界近傍における精度低下であり、S P H 法にかぎらず影響半径概念を用いた粒子法一般における問題でもある。

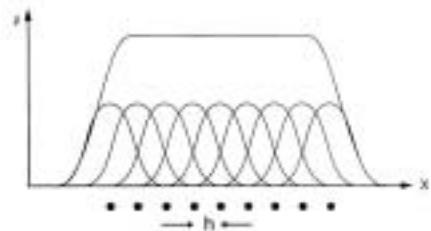


図 4-3-3 境界近傍の重ね合わせ

図 4-3-4 は同じ質量の粒子を同じスムージング長さ  $h$  で

Kernel 近似して計算した粒子密度の概念図である。それぞれの粒子の寄与は Kernel 関数の曲線形で表される。この図からは、ひとつひとつの粒子の質量はスムージング長さ  $h$  を超えて一様に広がっているようにみえる。ところが粒子を相互作用する質量とみなすのではなく内挿点と考えると、いかなる粒子の密度も、距離  $2h$  内に存在するすべての粒子の寄与を総合したものとなる。同じ質量、同じスムージング長さで計算した場合内部の密度は座標によらず全て等しくなる。しかし、片側からのみ他の粒子の寄与を受ける境界の粒子は密度が小さくなる。従って(4-3-13)式を用いて密度を表現する式

$$\rho(x) = \sum_{j=1}^N m^j W(x - x^j, h) \quad (4.3.39)$$

は境界補正なしでは不規則な結果となってしまう。これを解決する方法として、連続の式を使用する方法がある。連続の式より

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -\nabla \cdot V = -\sum_{j=1}^3 \frac{\partial V_j}{\partial x_j} \quad (4.3.40)$$

この式に(4.3.29)式を適用すると

$$\rho^{l,n+1} = \rho^{l,n} - \Delta t^{n+1/2} \left\{ \sum_{j=1}^N m^j \sum_{j=1}^3 (V_j^l - V_j^j) \frac{\partial W}{\partial x_j^l} \right\}^{n+1/2} \quad (4.3.41)$$

となる。この式は、初期の評価点位置における密度の時間変化が連続の式の条件下で求められるため、境界近傍の精度低下の問題は発生しない。このほかにもいくつかの境界近傍の精度向上を図る方法があるが、粒子法においては境界近傍の精度には留意すべきである。

### 4-3-3 弾塑性解析

S P H法による弾塑性解析アルゴリズム<sup>7)</sup>は有限要素解析で開発された手法を利用することが可能である。ただし有限要素法では降伏判定を要素の数値積分位置あるいは要素中心でおこない、また塑性域における弾塑性ひずみマトリクス作成も同様の位置でおこなうのに対し、S P H法では粒子位置で粒子単位でおこなう。

弾塑性問題には、応力とひずみの関係を与える構成方程式により全ひずみ理論(deformation theory)とひずみ増分理論(incremental theory)の2つがあるが、S P H法は現象の時間発展を陽的に解く手法であり、物理量の増分表現が扱いやすい。したがって弾塑性解析も増分理論でおこなう。

#### (1) 降伏判定および降伏条件

ひずみの定義や適合条件式など変形の幾何学的条件、応力とそのつり合い方程式などの力学的条件は、材料の特性に直接関係がなく、弾性・塑性・粘弾性のいずれの問題にも適用することができるのはS P H法においてもかわりはない。連続体の力学が、金属やプラスチックなどの材料により、また固体と液体により異なるのは、それらの力学的挙動を記述する応力 - ひずみ方程式、あるいは構成方程式(constitutive equation)による。

連続体力学では、弾性問題の構成方程式は、応力 とひずみ を結ぶテンソル方程式

$$\{\sigma\} = [D^e] \{\varepsilon\} \quad (4.3.42)$$

の形に書くことができる。これに対し、非弾性材料の構成方程式は、一般に増分形で

$$\{d\sigma\} = [D^e] \{d\varepsilon\} \quad (4.3.43)$$

または、

$$\{\dot{\sigma}\} = [D^e] \{\dot{\varepsilon}\} \quad (4.3.44)$$

の形に書き表される。S P H法では増分形を使用する。速度場の勾配からひずみテンソル速度を定義する(4-3-24)式を用い、応力増分をもとめることが弾性場と同様に弾塑性解析においても可能である。塑性体には降伏の現象があり、応力がある限界値に達するまでは弾性法則にしたがった増分形  $\{d\sigma\} = [D^e] \{d\varepsilon\}$  を用いることができる。S P H法で使用される降伏条件式は有限要素法で提案されたものが応用されるが、代表的な式は Mises の降伏条件であり、次の相当応力

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2] + 6(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2)} \quad (4.3.45)$$

が材料の降伏応力に達すると降伏すると判定する。

弾性状態の評価点(粒子)について降伏の始まりを判定すること、およびすでに降伏した評価点(粒子)について塑性状態を持続するか否か(除荷)の判定が必要である。

#### (2) 応力 - ひずみマトリクス

動的問題において、材料の変形速度が比較的小さな領域ではひずみ速度に依存しない構成方程式が使用される。有限要素法における代表的な方法はD<sup>p</sup>マトリクス法である。S P H弾塑性解析においても、同手法の適用が可能である。応力 - ひずみマトリクスとして弾性域においては式(4.3.31)を、塑性域においては次式を使用する。

$$\{d\sigma\} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} \frac{S_1^2}{S} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} \frac{S_1 S_2}{S} & -\frac{S_1 S_6}{S} \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} \frac{S_1 S_2}{S} & \frac{E}{1-\nu^2} \frac{S_2^2}{S} & -\frac{S_2 S_6}{S} \\ -\frac{S_1 S_6}{S} & -\frac{S_2 S_6}{S} & \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{S_6^2}{S} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [D_p] \{d\varepsilon\} \quad (4.3.46)$$

ここで

$$S = \frac{4}{9} \bar{\sigma}^2 H_0 + S_1 \sigma_x' + S_2 \sigma_y' + S_3 \tau_{xy}$$

$$S_1 = c(\sigma_x' + \nu \sigma_y'), \quad S_2 = c(\sigma_y' + \nu \sigma_x'), \quad S_3 = 2G \tau_{xy},$$

$$c = \frac{E}{(1-\nu^2)}, \quad \nu = \text{ポアソン比}$$

以上のように、粒子法における弾塑性解析は有限要素法の場合とまったく同様におこなうことができる。

#### (3) 高速衝突解析における構成方程式<sup>8)</sup>

衝突速度がきわめて大きな問題では、材料の構成方程式はひずみ速度の効果を考慮したものが使用される。代表的な式は以下の Johnson-Cook モデルである。

$$\sigma = (A + B \varepsilon_p^n) (1 + C \ln \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon_0}) \quad (4.3.47)$$

ここで  $A, B, C, n$  などは材料パラメータである。宇宙航空工学では、隕石の衝突解析によく使用されている。

### 4-3-4 圧縮性流体解析

圧縮性流体解析研究<sup>9)</sup>の対象は主として音速前後から音速を超える速さで流れる高速流体の挙動に関するものが多い。この領域では密度の変化が著しく、また密度や圧力の不連続面である衝撃波が生じる。

S P H法が開発され大きく発展した宇宙物理学の分野では、

星雲を超高速流体とみなし、星座の衝突や合体の挙動を粒子モデルで数値解析しようとした。

星雲は微小な星の集合体であり、宇宙規模でみれば圧縮性を有するガスとして近似できる。また微小な星を宇宙空間の1粒子としてモデル化することも理にかなっている側面もある。SPH法が宇宙物理の分野で誕生し、今日でもその分野において最も重要な解析手法でありつづける理由は、粒子モデルが星雲の挙動を表現するのに適しているにはかならない。しかし宇宙物理学で展開されているSPH法解析は重力や電磁力などの項をふくみ、工学者の扱う圧縮性流体問題とは異なった現象を扱う。この項では宇宙物理学に限定されず、SPH法で一般の圧縮性流体の挙動を解析するアルゴリズムを示す。

圧縮性流れでは、連続、運動量、エネルギーの式が基礎方程式となる。

連続の式

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (4.3.48)$$

運動量保存式 (ナビエ・ストークス方程式)

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) + \mathbf{F} \quad (4.3.49)$$

エネルギー方程式

$$\frac{De}{Dt} = -\frac{1}{\rho} p (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{q} + \frac{1}{\rho} (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}) \quad (4.3.50)$$

陽的差分法などでは、上記の微分式をいわゆる保存則表現でまとめて表し、時間発展にしたがって解く方法をとるが、粒子法では圧縮性流体のもつ物理量の変化を、時間発展にしたがいまとめてゆく。そこで、物理量間の依存性を示すいくつかの関係が必要となる。圧縮性気体では一般に粘性係数は圧力や温度などの状態によって変化する。気体の粘性は分子の衝突に起因するものであるが、実用的な近似式として温度変化を考慮したサザーランドの式が知られている。

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left( \frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \frac{T_0 + C}{T + C} \quad (4.3.51)$$

$\mu_0$  は  $T_0$  のときの粘性係数、 $C$  は定数で、いずれも気体の種類に応じて与えられる。また気体中を熱量が移動し温度変化を生じる場合は、以下のフーリエの式を使用する。

$$\mathbf{q} = -k \nabla T \quad (4.3.52)$$

また完全気体を扱う場合には以下の状態方程式が成り立つ。

$$p v = \frac{p}{\rho} = RT \quad (4.3.53)$$

ここで、 $R$  は気体定数 (gas constant)、 $v$  は比容積である。内部エネルギー  $e$  は状態量で、温度  $T$  と比容積  $v$  の関数である。完全気体では、内部エネルギーは下式(状態方程式)となる。

$$e = c_v T \quad (4.3.54)$$

このとき圧力と内部エネルギーは

$$p = (\kappa - 1) \rho e \quad (4.3.55)$$

ここで

$$\kappa \equiv \frac{c_p}{c_v} \quad (4.3.56)$$

$$c_p = \frac{\kappa R}{\kappa - 1}, c_v = \frac{R}{\kappa - 1} \quad (4.3.57)$$

などの関係がある。

(1) 解析アルゴリズム

解析は、以下の手順で行う。

温度・圧力の設定

(4.3.54)・(4.3.55)式にエネルギーの値を代入し、温度  $T$ ・圧力  $p$  をそれぞれ設定する。

速度の空間微分値の計算

速度の時間変化は(4.3.49)式によって求めることができる。そのためには応力  $\boldsymbol{\tau}$  が必要だが、これは応力と変形速度の関係より求める。そのために必要な速度の空間微分をまず求める必要がある。これらを(4.3.15)式によって求める。

粘性係数の計算

温度は既に設定してあるので(4.3.51)式から値を求めることができる。

熱流束の計算

エネルギーの時間更新を求めるのに必要な熱流束  $\mathbf{q}$  を(4.3.52)式を使って求める。

密度の更新値の計算

(4.3.48)式より、密度の時間更新  $\rho$  を求める

速度の更新値の計算

(4.3.49)式より速度の時間更新  $\mathbf{v}$  を求める。

エネルギーの更新値の計算

(4.3.50)式よりエネルギーの時間更新  $e$  を求める。

粒子の移動

更新した速度に従い、粒子を移動させる。

これを1ステップとし、必要な回数繰り返す。

(2) 各種方程式のSPH法を用いた変換

基本的に、物理パラメータの空間微分はSPH法の基礎方程式(4-3-14)~(4-3-16)によって離散化する。

速度の各微分に関しては(4-3-14)式を使い、粒子  $I$  について、

$$\frac{\partial u^I}{\partial x} = \frac{1}{\rho^I} \sum_{J=1}^N m^J (u^I - u^J) \cdot \frac{\partial}{\partial x^J} W(x^I - x^J, h) \quad (4.3.58)$$

また密度変化は連続の式を用い、

$$\Delta \rho^I = -\Delta t \cdot \sum_{J=1}^N m^J (v^I - v^J) \cdot \nabla W(x^I - x^J, h) \quad (4.3.59)$$

速度増分は運動量保存式を変形し

$$\Delta \mathbf{v} = -\frac{\Delta t}{\rho} \nabla p + (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \quad (4.3.60)$$

ここで外力は考えないことにする。この式に(4-3-16)式を適用して

$$\Delta \mathbf{v}^I = \Delta t \cdot \left[ \sum_{J=1}^N m^J \left( \frac{p^I}{(\rho^I)^2} + \frac{p^J}{(\rho^J)^2} \right) + \sum_{J=1}^N m^J \left( \frac{\boldsymbol{\tau}^I}{(\rho^I)^2} + \frac{\boldsymbol{\tau}^J}{(\rho^J)^2} \right) \right] \cdot \nabla W(x^I - x^J, h) \quad (4.3.61)$$

また応力  $\boldsymbol{\tau}$  について、法線応力  $I_{xx}$  は

$$\begin{aligned} \tau_{xx}^I = & -\frac{2\mu^I}{3\rho^I} \sum_{J=1}^N m^J (v^I - v^J) \cdot \nabla W(x^I - x^J, h) \\ & + \frac{2\mu^I}{\rho^I} \sum_{J=1}^N m^J (u^I - u^J) \cdot \frac{\partial}{\partial x^J} W(x^I - x^J, h) \end{aligned} \quad (4.3.62)$$

せん断応力  $I_{xy}$  は

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^I = & \frac{\mu^I}{\rho^I} \left[ \sum_{J=1}^N m^J (v^I - v^J) \cdot \frac{\partial}{\partial x^J} W(x^I - x^J, h) \right. \\ & \left. + \sum_{J=1}^N m^J (u^I - u^J) \cdot \frac{\partial}{\partial y^J} W(x^I - x^J, h) \right] \end{aligned} \quad (4.3.63)$$

となる。他の成分についても同様にして求めることができる。

エネルギー増分は、エネルギー方程式を変形し

$$\Delta e = \frac{\Delta t}{\rho} [-p(\nabla \cdot v) - \nabla \cdot q + (\tau : \nabla v)] \quad (4.3.64)$$

右辺の各項について、その空間微分の値を求める。

たとえば  $\nabla \cdot q^I$  項に関しては、(4-3-16) 式を用いて

$$\nabla \cdot q^I = -\rho^I \sum_{J=1}^N m^J \left( \frac{q^I}{(\rho^I)^2} + \frac{q^J}{(\rho^J)^2} \right) \cdot \nabla W(x^I - x^J, h) \quad (4.3.65)$$

$$q^I = -\frac{k}{\rho^I} \sum_{J=1}^N m^J (T^I - T^J) \cdot \nabla W(x^I - x^J, h) \quad (4.3.66)$$

### (3) 衝撃波

粘性項の影響が比較的小さな領域に、衝撃波を記述するために必要な散逸を数値的に導入する方法は、von Neumann-Richtmyer の人工粘性項を導入する方法である。この人工粘性の項は 4-3-4 節に記述した数値拡散を抑制するものと本質的に同じである。この人工粘性法は精度の良い解を与えるためには、衝撃波の強さに応じて粘性項の大きさを調整する必要があるが、宇宙物理学の分野では主としてこの方法が採られている。粘性項を無視した運動量保存式を SPH法にしたがって離散化すると

$$\frac{d\bar{v}_i}{dt} = -\sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) \bar{\nabla}_i W(\bar{r}_i - \bar{r}_j, h) \quad (4.3.67)$$

となる。ここに人工粘性項を導入すると

$$\frac{d\bar{v}_i}{dt} = -\sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} + \Pi_{ij} \right) \bar{\nabla}_i W(\bar{r}_i - \bar{r}_j, h) \quad (4.3.68)$$

となり、この式は 節の(4.3.34)式と基本的に同等である。ただし前者は弾性連続体の応力場による運動方程式であり、後者は圧縮性流体の圧力場による定式化である。したがって SPH法による圧縮性流体解析はいまのところ通常の流体力学における空気、ガスなどの衝撃波問題を厳密に扱うにいたっていない。

#### 4-3-5 非圧縮粘性解析 (SMAC-SPH 法)

SPH 法は圧縮性流体解析手法として提案されたが、水などいわゆる非圧縮粘性流体解析手法にも適用されつつある。最初に SPH法を非圧縮粘性流体解析に適用したのは SPH法の提案者である Monaghan ら<sup>10)</sup>であり、非圧縮性の導入は状態方程式を用いておこなっている。そのため非圧縮性

の保障は不十分である。その後、プロジェクション法あるいは差分法で利用されている SMAC 法<sup>11)</sup>を用いてより厳密に非圧縮性を導入する試みがなされている。ここでは SMAC アルゴリズムを応用した SMAC-SPH 法について紹介する。

#### (1) 基礎式とアルゴリズム

非圧縮粘性流体の運動方程式である Navier-Stokes 方程式をラグランジェの手法で表わすと下式となる。

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \nabla^2 u + f \quad (4.3.69)$$

ここで  $u$  は流速、 $\rho$  は密度、 $P$  は圧力、 $\mu$  は動粘性係数、 $f$  は体積力である。Navier-Stokes 方程式の粘性項は、流体の変形プロセスにたいする抵抗として現れる内部応力に起因しており、その応力テンソル  $\tau_{ij}$  と流速成分  $u_i$  は以下の関係である。

$$\tau_{ij} = \mu \left( e_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right), \quad e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (4.3.70)$$

$$\text{ただし、} \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

ここで  $\mu$  は粘性係数である。上式は粘性により生じる応力と流体の運動(変形)を関連づけているが、これを Newton の粘性法則をもとに粘性項として表現すると

$$\nu \nabla^2 u = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (4.3.71)$$

と表される。まず、式(8)の流速に関する微分項は式(5)を用いて離散化すると

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho^I} \sum_{J=1}^N m^J (u^I_i - u^J_j) \nabla W(x^I - x^J, h) \quad (4.3.72)$$

と表現される。同様に応力テンソルを粒子場にたいして離散化すれば

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho^I} \sum_{J=1}^N m^J (\tau_{ij}^I - \tau_{ij}^J) \nabla W(x^I - x^J, h) \quad (4.3.73)$$

と表すことができる。Navier-Stokes 方程式の粘性項は、従来、人工粘性などで近似的に扱われていたが、上記の関係をいれれば、SPH理論の範囲で直接に扱うことが可能となる。

また、圧力項については、下式により離散化をおこなう。

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho^I} \sum_{J=1}^N m^J (P^I - P^J) \nabla W(x^I - x^J, h) \quad (4.3.74)$$

Navier-Stokes 方程式の時間積分法としては SMAC アルゴリズム<sup>12)</sup>を採用する。SMAC 法では、ナビエーストークス方程式の圧力項のみを陰的に扱い、他の項は陽的に扱う。時間差分スキームにはオイラーの陽解法を使う。SMAC アルゴリズムによれば  $(n+1)$  ステップの流速  $u^{n+1}$  は次式となる。

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \left( -\frac{1}{\rho} \text{grad} p^{n+1} + \nu \nabla^2 u_i^n + f \right) \quad (4.3.75)$$

この評価式では  $P^{n+1}$  の値が未知であるため直接に  $u_i^{n+1}$  が求められない。そのため、現時刻  $(n)$  ステップにおける流速、圧力  $p^n$  を用いて仮の速度  $u_i^n$  をまず求めるのが SMAC の手法である。

$$u_i^* = u_i^n + \Delta t \left( -\frac{1}{\rho} \text{grad} p^n + v \nabla^2 u_i^n + f \right) \quad (4.3.76)$$

さらに式(4.3.75)から式(4.3.76)を引くと、次式が得られる。

$$u_i^{n+1} = u_i^* - \Delta t \frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial x_i} \quad (4.3.77)$$

ただし、

$$P^{n+1} = P^n + P' \quad (4.3.78)$$

ここで $P'$ が何らかの方法でわかれば $n+1$ ステップにおける流速は式(4.3.77)より求められる。そのため以下のような操作をおこなう。

すなわち $u$ は連続の式を満たさなくてはならないので、式(4.3.77)の発散をとると次の圧力に関するポアソン方程式が求められる。

$$\nabla^2 P' = \frac{\rho}{\Delta t} \text{div} u_i^* \quad (4.3.79)$$

このポアソン方程式は2階の偏微分式であり、Clearyらの方法<sup>6)</sup>にしたがい、ポアソン方程式の左辺を粒子場へ離散化する。

$$\nabla^2 P' = \sum_{J=1}^N \frac{m^J}{\rho^J} \left( \frac{4}{\rho^I + \rho^J} \right) \frac{P^{IJ} r^{IJ} \cdot \nabla W}{|(r^{IJ})^2|} \quad (4.3.80)$$

ここで、 $P^{IJ} = P^I - P^J$ 、 $r^{IJ} = r^I - r^J$ である。

ポアソン方程式の右辺については、速度に関する1階微分であるから、式(4.3.16)により下式のように離散化することができる。

$$\nabla^2 P' = -\rho^I \sum_{J=1}^N m^J \left( \frac{u^{*I}}{(\rho^I)^2} + \frac{u^{*J}}{(\rho^J)^2} \right) \nabla W(x^I - x^J, h) \quad (4.3.81)$$

SMAC法によるSPH解析手法(SMAC-SPH法)にしたがった非圧縮粘性流体の定式化は以上のものである。まず(4.3.76)式により、仮の流速を陽的に求め、その速度により粒子を移動させる(仮の移流計算)。次に非圧縮性条件を満たすように(4.3.81)式の圧力ポアソン方程式を陰的に解いて修正された圧力、速度を求め仮の流速の寄与を差し引き、粒子を再移動させる。

## (2) 粒子法の境界条件

流れ解析における境界条件をもとに、粒子法における境界条件の考え方をまとめる。差分法流体解析の場合<sup>6)</sup>を参考にすると、一般に、流れ解析においては壁面との境界条件(粘着条件、すべり壁条件)流入・流出条件を考慮しなければならない。粒子法による自由表面流解析ではさらに、流体の自由表面条件を考慮する必要がある。以下に、粒子法によるそれぞれの境界条件の扱い方について記述する。

- 1) 粘着条件: 境界面で速度 $v=0$ である。したがって、境界近傍(境界粒子の影響半径内)にある流体粒子を探索し、その速度をゼロにする。
- 2) すべり壁条件: 流れ場のレイノルズ数から予想される境界層が十分薄い場合にはむしろすべり壁条件が適当である。この場合は、壁近傍の粒子探索をFig. 1に示すようにおこない、その速度成分を摩擦係数に応じて減少させる。河川の川

底などの摩擦条件としては、粗度係数<sup>7)</sup>を与えて、やはり粒子探索をおこない、その係数に比例した速度の制御をおこなう。

- 3) 流入条件: 流入条件は境界における速度を指定し、その速度を粒子に与えればよい。

$$v \text{ at boundary} = v \text{ in}$$

- 4) 流出条件: SPH法はラグランジアン系で記述されているので、流出境界において特別な考慮は必要ない。

- 5) 自由表面境界: 粒子法では流体の自由表面の定義として、粒子数密度概念を用いた条件を導入すると都合がよい。粒子数密度は下式により定義される。

$$n_i = \sum_{J=1}^N W(x^I - x^J, h) \quad (4.3.82)$$

流体を表現する粒子群の粒子数密度分布をみると、非圧縮性流体内部では粒子数密度が一定値に保存される。一方、流体表面ではおなじ影響半径内部に存在する粒子数は減少するから流体内部よりも粒子数密度は低下する。したがって、粒子数密度が流体

内部の一定値よりもある閾値以下に低下した部分は自由表面あるいは、その近傍にある流体粒子であると考えられる。越塚ら<sup>8)</sup>はMPS粒子法解析において最大粒子数密度の0.96程度にまで低下した領域を自由表面とみなす条件を提案している。

上記の数値は経験的に求められた値であるが、筆者らの検討によれば、0.90 ~ 0.97程度の範囲で使用して、自由表面の形成にはほとんど大差は現れていない。すなわち、粒子数密度条件を用いた自由表面境界の定義法は、あいまいな流体表面を柔軟に表現する手法として有効であるといえる。本研究では「最大粒子数密度の0.95以下となる粒子数密度をもつ粒子は自由表面に位置する粒子」として、その粒子位置の内圧はゼロとしている。

## 4-3-6 SPH法の展開

粒子法の特徴の1つは格子生成が必要ないということである。これにより3次元複雑形状における格子生成の労力が大きく軽減される。自動格子生成技術も研究されているが、例えば未だに任意の3次元空間を六面体要素だけで自動分割するアルゴリズムは見つかっていないなど、格子生成は数値シミュレーションの実行者にとって大きな負担であることに変わりはない。計算精度は生成した格子に依存することもあり、格子生成は計算の中身を熟知したエキスパートによる手作業とならざるを得ない。

SPH法は、宇宙物理における星雲衝突・生成問題など、超高速度衝突現象を解析する特殊な手法として認められてきた。しかし全くメッシュを使用しないメッシュレス解析手法であるという側面が近年急速に注目を集めつつある。連続体を密度の濃い粒子群としてデータ化するのは、複雑な形状についても難しいことではない。粒子群として表現された構造物をKernel積分によってスムージング化し、構造物の解析をおこなう試みが多くの分野で始まっている。すなわち、有限要素法などの従来の大規模解析手法を補完する、より一般的な解析ツールとして研究する方向である。もう1つの特徴は、連続体の運動が粒子の運動によって表されるため、界面の大変形のみならずそのトポロジー(位相)まで変化する場合にも適用することができることである。構造の問題では、超大変形解析である。メッシュが破綻してしまう大变形解析にはSPH法の概念は適性があると思われる。また流体解析においても自由液面を有する流れ、気液二相流、融解・凝固などの相変化を伴う熱流動、流体と構造物の相互作用、などへの

応用研究が展開すると思われる。しかしながら、粒子法に特有な短所も存在する。構造問題では境界面における精度、き裂などの空間表現の方法、高次の補間法による全体的な精度の向上、また流体解析では密度の異なる界面における補間法、流体力の精度、乱流問題への適性の検討などが必要である。

#### 文献

- 1) Lucy, L.B., "A numerical approach to the testing of the fission hypothesis", *The Astronomical Journal*, 82, 12, (1977), 1013-1024
- 2) Gingold, R.A. & Monaghan, J. J. "Smoothed particle hydrodynamics – theory and application to non-spherical stars" *Mon. Not. R. astr. Soc.* 181, (1977), 375-389
- 3) Swegle, J.W., et.al., "An Analysis of Smoothed Particle Hydrodynamics" SANDIA Report SAND93-2513 (1994)
- 4) Libersky, L.D., et.al. "High Strain Lagrangian Hydrodynamics" *Journal of Computational Physics*, 109, (1993), 67-75
- 5) Sakai, Y. and Yamashita A. "Large Deformation Analysis Using Particle Method", ICCM2004 Singapore, (2004), p597-601.
- 6) Cleary, P.W. and Monaghan J.J. "Conduction Modelling Using Smoothed Particle Hydrodynamics" *Journal of Computational Physics*, 148 (1999), 227-264
- 7) 酒井讓, 山下彰彦 "SPH 理論に基づく粒子法による構造解析の基礎検討" *日本機械学会論文集(A 編)* 67 巻 659 号 (2001-7) p.7-16
- 8) Katayama, M. et.al. "A Numerical Simulation Method and Its Validation for Debris Impact Against the Whipple Bumper Shield", *Int.J.Impact Engng.*, 17, (1995), 465-476
- 9) Gingold, R.A. and Monaghan, J.J. "Kernel Estimates as a Basis for General Particle Methods in Hydrodynamics", *Journal of Computational Physics* 46, (1982), 429-453
- 10) Monaghan, J.J. "Simulating Free Surface Flows with SPH", *Journal of Computational Physics* 110 (1994) 399-406
- 11) 酒井讓, 楊宗億, 丁泳鐘 "SPH 法による非圧縮粘性流体解析手法の研究" *日本機械学会論文集(B 編)* 70 巻 666 号 (2004-8) 47-54
- 12) 東京大学出版会、非圧縮性流体解析、(1999), 37