

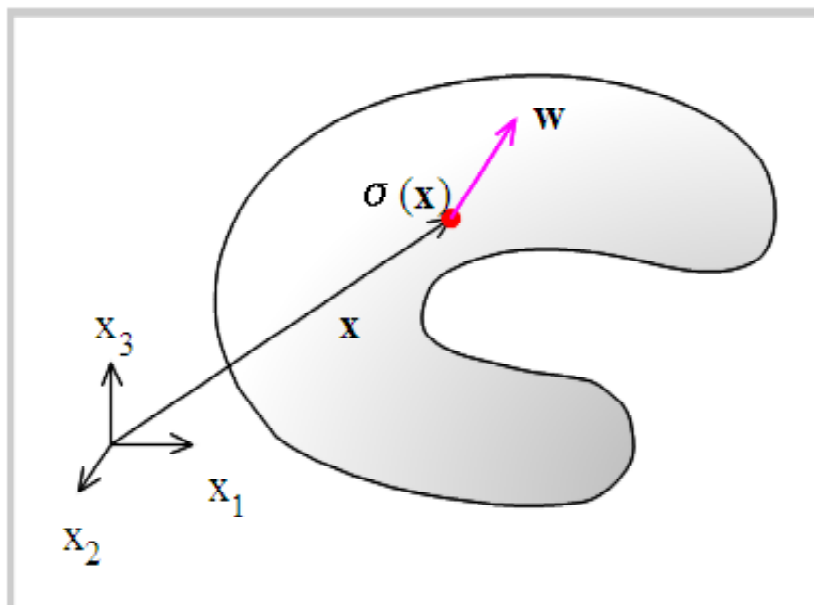
解析塾 中部地区 実践FEM初級講座

第0回

中部CAE懇話会

1. FEMの定式化

1.1 応力と変位の一般式



ある応力場 $\sigma(\mathbf{x})$ に変位ベクトル $\mathbf{w}$ を考える。

$$\begin{aligned}\int_V \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} w_i dV &= \int_V \left\{ \frac{\partial (\sigma_{ik} w_i)}{\partial x_k} - \sigma_{ik} \frac{\partial w_i}{\partial x_k} \right\} dV \\ &= \int_V \frac{\partial (\sigma_{ik} w_i)}{\partial x_k} dV - \int_V \sigma_{ik} \frac{\partial w_i}{\partial x_k} dV\end{aligned}$$

... ①積の微分公式

$$= \int_S \sigma_{ik} w_i n_k dS - \int_V \sigma_{ik} \frac{\partial w_i}{\partial x_k} dV \quad \dots \text{②ガウスの発散定理}$$

$$= \int_S \sigma_{ik} w_i n_k dS - \int_V \sigma_{ik} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_k} + \frac{\partial w_k}{\partial x_i} \right) \right\} dV \dots \text{③行列分解と対称/反対称行列の内積}$$

$$\therefore \int_V \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} w_i dV = \int_S \sigma_{ik} w_i n_k dS - \int_V \sigma_{ik} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_k} + \frac{\partial w_k}{\partial x_i} \right) \right\} dV$$

―― 解説(1) 総和規約 ―――

総和規約：「一つの項の中に同じ添字(suffix)が，2 度現われた場合，その添字について和をとる」

(例)

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$$

$$= \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i$$

3次元ユークリッド空間では和は1、2、3で取られるので、省略して、

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$$

と書く。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} w_i &= \frac{\partial \sigma_{1k}}{\partial x_k} w_1 + \frac{\partial \sigma_{2k}}{\partial x_k} w_2 + \frac{\partial \sigma_{3k}}{\partial x_k} w_3 \\
&= \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} w_1 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} w_1 + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} w_1 + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} w_2 + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} w_2 + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} w_2 + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} w_3 + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} w_3 + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} w_3 \\
&= \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} w_x + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} w_x + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} w_x + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} w_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} w_y + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} w_y + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} w_z + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} w_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} w_z
\end{aligned}$$

―― 解説(2) ①積の微分公式 ―――

積の微分公式 $(uv)' = u'v + uv'$ を使って $u = \sigma_{ik}$ 、 $v = w_i$ 、 $x = x_k$ とすれば、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(uv)}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} v + u \frac{\partial v}{\partial x} \\
\frac{\partial(\sigma_{ik} w_i)}{\partial x_k} &= \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} w_i + \sigma_{ik} \frac{\partial w_i}{\partial x_k} \\
\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} w_i &= \frac{\partial(\sigma_{ik} w_i)}{\partial x_k} - \sigma_{ik} \frac{\partial w_i}{\partial x_k}
\end{aligned}$$

両辺を積分し、

$$\int_V \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} w_i dV = \int_V \left\{ \frac{\partial(\sigma_{ik} w_i)}{\partial x_k} - \sigma_{ik} \frac{\partial w_i}{\partial x_k} \right\} dV$$

— — — 解説(3) ②ガウスの発散定理(偏導関数の体積微分) — — — — —

$$\int_V \text{div} \Psi dV = \int_S \Psi \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\int_V \nabla \cdot \Psi dV = \int_S \Psi \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\int_V \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \Psi_3}{\partial x_3} \right) dV = \int_S (\Psi_1 n_1 + \Psi_2 n_2 + \Psi_3 n_3) dS$$

$$\int_V \frac{\partial \Psi_k}{\partial x_k} dV = \int_S \Psi_k n_k dS$$

から、 $\Psi_k = \sigma_{ik} w_i$ とおけば、

$$\int_V \frac{\partial (\sigma_{ik} w_i)}{\partial x_k} dV = \int_S \sigma_{ik} w_i n_k dS$$

— — — 解説(4) ③行列分解と対称/反対称行列の内積 — — — — —
 任意の正方行列は対称行列と反対称行列の和に一意に分解される。

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$$

$$= \mathbf{A}_s + \mathbf{A}_a$$

$\mathbf{A}_s$: 対称(symmetry)行列

$\mathbf{A}_a$: 反対称(anti-symmetry)行列

(例)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_s = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_a = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ここで

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_k} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial x_1} & \frac{\partial w_1}{\partial x_2} & \frac{\partial w_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial w_2}{\partial x_1} & \frac{\partial w_2}{\partial x_2} & \frac{\partial w_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial w_3}{\partial x_1} & \frac{\partial w_3}{\partial x_2} & \frac{\partial w_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial x_1} & \frac{\partial w_1}{\partial x_2} & \frac{\partial w_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial w_2}{\partial x_1} & \frac{\partial w_2}{\partial x_2} & \frac{\partial w_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial w_3}{\partial x_1} & \frac{\partial w_3}{\partial x_2} & \frac{\partial w_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial x_1} & \frac{\partial w_2}{\partial x_1} & \frac{\partial w_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial w_1}{\partial x_2} & \frac{\partial w_2}{\partial x_2} & \frac{\partial w_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial w_1}{\partial x_3} & \frac{\partial w_2}{\partial x_3} & \frac{\partial w_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \frac{\partial w_k}{\partial x_i}$$

となり

$$\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_k} \right)^T = \left(\frac{\partial w_k}{\partial x_i} \right)$$

となっている。

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T) \\ &= \mathbf{A}_s + \mathbf{A}_a \end{aligned}$$

において、 $\mathbf{A} = \frac{\partial w_i}{\partial x_k}$ とすれば、 $\mathbf{A}^T = \frac{\partial w_k}{\partial x_i}$ であるから、

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_k} + \frac{\partial w_k}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_k} - \frac{\partial w_k}{\partial x_i} \right)$$

ここで、対称テンソル σ_{ik} と $\frac{\partial w_i}{\partial x_k}$ の内積は $\frac{\partial w_i}{\partial x_k}$ の対称部分だけが関与するから

$$\begin{aligned}
\sigma_{ik} \frac{\partial w_i}{\partial x_k} &= \sigma_{ik} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_k} + \frac{\partial w_k}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_k} - \frac{\partial w_k}{\partial x_i} \right) \right\} \\
&= \sigma_{ik} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_k} + \frac{\partial w_k}{\partial x_i} \right) + \cancel{\sigma_{ik} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_k} - \frac{\partial w_k}{\partial x_i} \right)} \\
&= \sigma_{ik} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_k} \right)_{\text{sym}}
\end{aligned}$$

参考：テンソルの内積(複内積)

$$\begin{aligned}
\mathbf{C} &= \mathbf{A}_{ij} \mathbf{B}_{ij} \\
&= \mathbf{A} : \mathbf{B} \\
&= A_{11} B_{11} + A_{12} B_{12} + \cdots + A_{32} B_{32} + A_{33} B_{33}
\end{aligned}$$

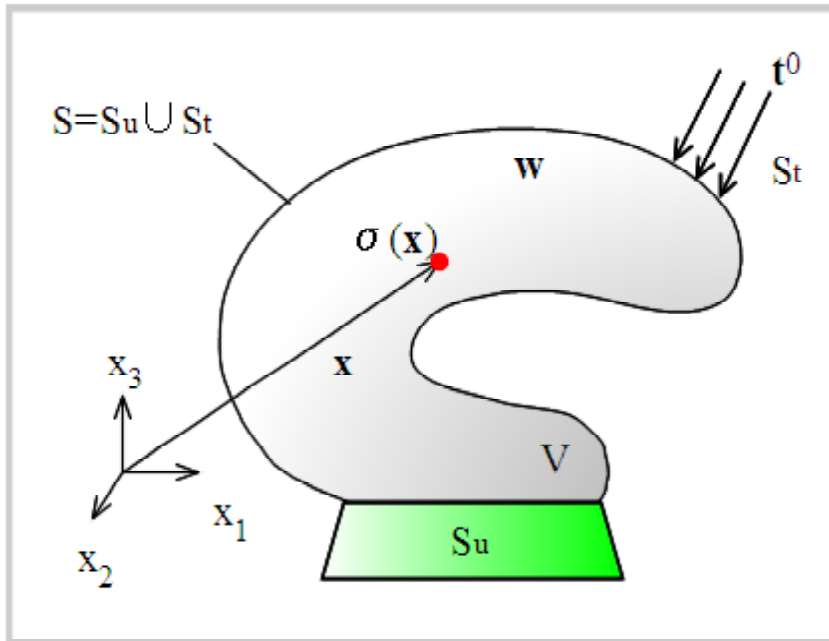
$$\text{対称テンソル} : \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

$$\text{反対称テンソル} : \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{A} &= \cancel{\sigma_{11}} \cdot \cancel{0} + \cancel{\sigma_{12}} \cdot \cancel{(-a)} + \cancel{\sigma_{13}} \cdot \cancel{(-b)} \\
 \text{テンソル内積：} \quad &+ \cancel{\sigma_{12}} \cdot a + \cancel{\sigma_{22}} \cdot \cancel{0} + \cancel{\sigma_{23}} \cdot \cancel{(-c)} \\
 &+ \cancel{\sigma_{13}} \cdot b + \cancel{\sigma_{23}} \cdot c + \cancel{\sigma_{33}} \cdot \cancel{0} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

となり、任意の対称テンソルと反対称テンソルの内積はゼロになる。

1.2 つり合いの式



$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i = 0 \quad \text{in } V$$

$$\sigma_{ij} n_j = t_i^0 \quad \text{on } S$$

任意のベクトル関数 w_i に対して内積を取ると

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i = 0$$

$$\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i \right) w_i = 0$$

$$\int_V \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i \right) w_i dV = 0$$

$$\int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} w_i dV + \int_V \rho b_i w_i dV = 0$$

< — — 応力と変位の一般式

$$\int_S \sigma_{ij} w_i n_j dS - \int_V \sigma_{ij} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) \right\} dV + \int_V \rho b_i w_i dV = 0$$

< — — 境界条件から

$$\int_S t_i^0 w_i dS - \int_V \sigma_{ij} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) \right\} dV + \int_V \rho b_i w_i dV = 0$$

$$\int_V \sigma_{ij} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) \right\} dV = \int_S t_i^0 w_i dS + \int_V \rho b_i w_i dV$$

: 弱形式

w を仮想変位とすれば $w = u$ としても結局は同じこと。

微小歪みは $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ であるから

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_S t_i^0 u_i dS + \int_V \rho b_i u_i dV$$

(内部仕事) = (外部仕事)

< — — 仮想仕事の原理

1.3 マトリックス形式への定式化

前出の

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_S t_i^0 u_i dS + \int_V \rho b_i u_i dV$$

を、 $t_i^0 \rightarrow t_i$ 、 $\rho b_i \rightarrow b_i$ と書き換えて、

$$\int_V \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dV = \int_S u_i t_i dS + \int_V u_i b_i dV$$

―― 解説(5) 各項の総和規約を行列で表示 ―――

$$\varepsilon_{ij} \sigma_{ij} = \varepsilon_{1j} \sigma_{1j} + \varepsilon_{2j} \sigma_{2j} + \varepsilon_{3j} \sigma_{3j}$$

$$= \varepsilon_{11} \sigma_{11} + \varepsilon_{12} \sigma_{12} + \varepsilon_{13} \sigma_{13} + \varepsilon_{21} \sigma_{21} + \varepsilon_{22} \sigma_{22} + \varepsilon_{23} \sigma_{23} + \varepsilon_{31} \sigma_{31} + \varepsilon_{32} \sigma_{32} + \varepsilon_{33} \sigma_{33}$$

$$= \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} & \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix}$$

ここで、

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{33} \end{Bmatrix}, \quad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix}$$

$$= \{\varepsilon\}^T \{\sigma\}$$

同様に、

$$u_i t_i = u_1 t_1 + u_2 t_2 + u_3 t_3$$

$$= \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix}$$

$$= \{u\}^T \{t\}$$

、

$$u_i b_i = u_1 b_1 + u_2 b_2 + u_3 b_3$$

$$= \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$

$$= \{u\}^T \{b\}$$

ここで、

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}, \quad \{t\} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix}, \quad \{b\} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$

$$\int_V \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dV = \int_S u_i t_i dS + \int_V u_i b_i dV$$

これをマトリックスにすると

$$\underline{\int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_S \{u\}^T \{t\} dS + \int_V \{u\}^T \{b\} dV}$$

となる。

ここで、

$$\{\varepsilon_m\} = [B_m] \{u_m\}$$

で表されるように要素を定義： $[B_m]$

なお、行列式の公式から $\{\varepsilon_m\}^T = \{u_m\}^T [B_m]^T$

材料物性のマトリクスを $[D]$ とすれば

$$\{\sigma_m\} = [D]\{\varepsilon_m\}$$

【左辺】

$$\begin{aligned}\int_V \{\varepsilon_m\}^T \{\sigma_m\} dV &= \int_{element} \{u_m\}^T [B_m]^T [D] \{\varepsilon_m\} dV \\ &= \int_{element} \{u_m\}^T [B_m]^T [D] [B_m] \{u_m\} dV \\ &= \{u_m\}^T \int_{element} [B_m]^T [D] [B_m] dV \{u_m\}\end{aligned}$$

＜―― u は体積積分に関係しない

$$= \{u_m\}^T [K_m] \{u_m\}$$

$$[K_m] = \int_{element} [B_m]^T [D] [B_m] dV : \text{要素剛性マトリクス}$$

【右辺】

$$= \int_S \{u\}^T \{t\} dS + \int_V \{u\}^T \{b\} dV$$

要素内の変位を形状関数で表す

$$\{u\} = [N_m] \{u_m\}$$

$\{u\}$: 要素内変位

$[N_m]$: 形状関数

$\{u_m\}$: 要素変位

$$\begin{aligned}\{u\}^T &= \{u_m\}^T [N_m]^T \\ &= \int_S \{u_m\}^T [N_m]^T \{t_m\} dS + \int_V \{u_m\}^T [N_m]^T \{b_m\} dV \\ &= \{u_m\}^T \int_S [N_m]^T \{t_m\} dS + \{u_m\}^T \int_V [N_m]^T \{b_m\} dV \quad \leftarrow u \text{ は変位で積分には関係ない} \\ \{F_{t_m}\} &= \int_S [N_m]^T \{t_m\} dS \quad \text{境界からの外力} \\ \{F_{b_m}\} &= \int_V [N_m]^T \{b_m\} dV \quad \text{体積力} \\ &= \{u_m\}^T \{F_{t_m}\} + \{u_m\}^T \{F_{b_m}\}\end{aligned}$$

【右辺】=【左辺】

$$\begin{aligned}\{u_m\}^T [K_m] \{u_m\} &= \{u_m\}^T \{F_{t_m}\} + \{u_m\}^T \{F_{b_m}\} \\ \cancel{\{u_m\}^T} [K_m] \{u_m\} &= \cancel{\{u_m\}^T} \{F_{t_m}\} + \cancel{\{u_m\}^T} \{F_{b_m}\} \\ [K_m] \{u_m\} &= \{F_{t_m}\} + \{F_{b_m}\} \\ \underline{[K_m] \{u_m\} = \{F_m\}}\end{aligned}$$

要素を重ね合わせて全体を作れば

$$\underline{[K] \{u\} = \{F\}}$$

これを解いて

$$\{u\} = [K]^{-1} \{F\}$$

各部の変位が計算される。

全体変位 $\{u\}$ から要素変位 $\{u_m\}$ を求める。

$$\{\varepsilon_m\} = [B_m] \{u_m\}$$

$$\{\sigma_m\} = [D] \{\varepsilon_m\}$$

で各要素の歪み、応力を計算する。

1.4 FEMの解析手順

(1) 要素を構成する

節点の座標位置、要素の構成、要素の材料物性を決定

(2) $[D]$ マトリックスを作成する

$[D]$ マトリックス：材料特性マトリックス

$$\{\sigma_m\} = [D]\{\varepsilon_m\}$$

(3) 要素ごとに $[B_m]$ マトリックスを作成する

$[B_m]$ マトリックス：要素形状、要素特性により決まる

$$\{\varepsilon_m\} = [B_m]\{u_m\}$$

(4) 要素毎に $[K_m]$ マトリックスを作成する

$$[K_m] = \int_{element} [B_m]^T [D] [B_m] dV$$

(5) $[K_m] \rightarrow [K]$ マトリックスを作成する

$[K]$ ：全体剛性マトリックス

要素ごとの $[K_m]$ を全体の要素について重ね合わせる

(6) 境界条件から節点荷重ベクトル $\{F_b\}$ を作成する

変位ベクトル $\{u\}$ の拘束条件を処理する

(7) 剛性方程式を解き節点変位 $\{u\}$ を求める

$$\{u\} = [K]^{-1} \{F_b\}$$

(8) 求まった $\{u\}$ に $[B_m]$ 、 $[D_m]$ をかけて要素ごとの歪み $\{\varepsilon_m\}$ 、応力 $\{\sigma_m\}$ を求める。

$$\{u\} \rightarrow \{u_m\}$$

$$\{\varepsilon_m\} = [B_m] \{u_m\}$$

$$\{\sigma_m\} = [D] \{\varepsilon_m\}$$

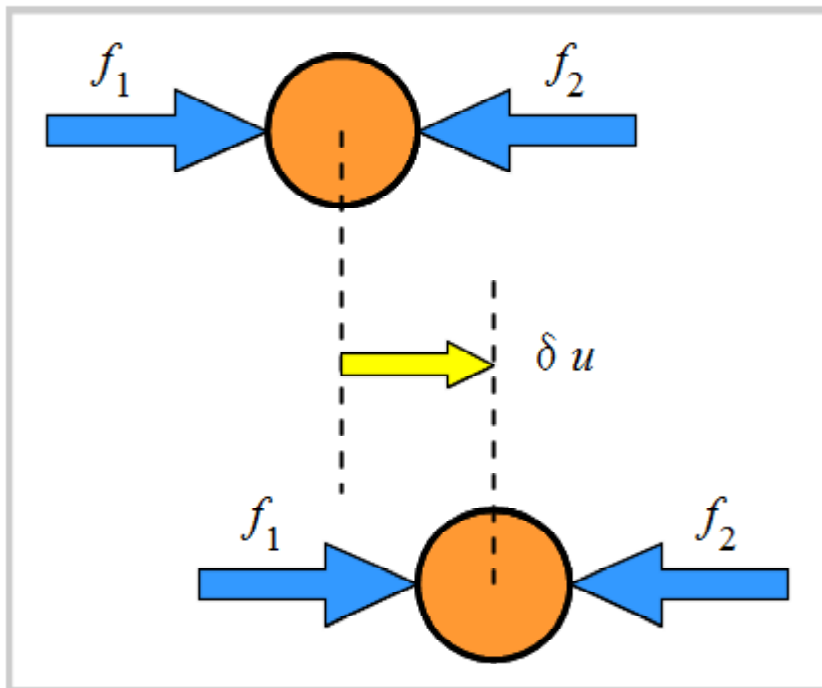
(9) 結果の出力

変形図、応力分布を出力する。

2. 仮想仕事の原理

「力を受けてつり合い状態にある物体を仮想変位させた時、物体に働いているすべての力がこの仮想変位によってなす仕事の総和は零となる」

2.1 質点系の場合



仮想変位 δu は力が変化しないほど微小であると考え
る。

仮想変位による仮想仕事をゼロと置くと、

$$f_1 \cdot \delta u - f_2 \cdot \delta u = 0$$

となる。

これを変形すると、

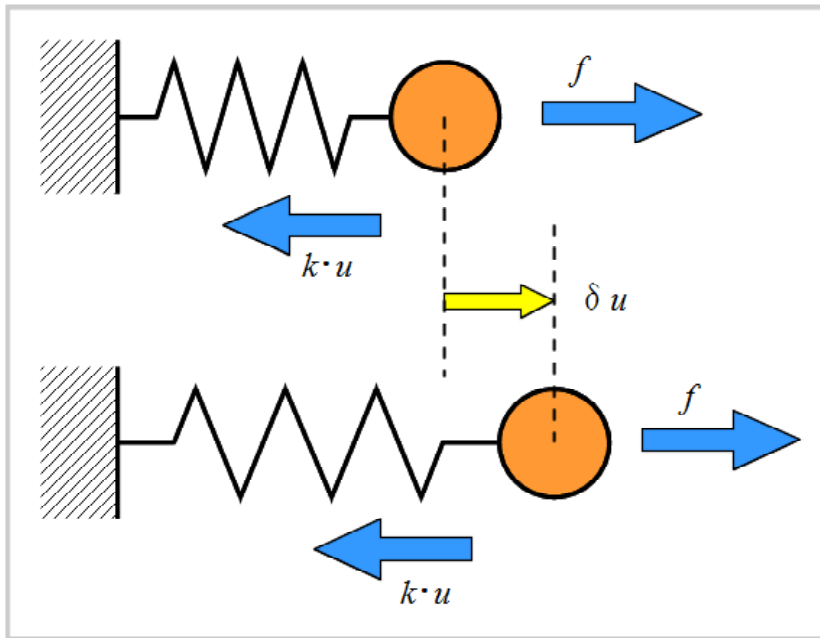
$$f_1 \cdot \delta u - f_2 \cdot \delta u = 0$$

$$f_1 \cdot \cancel{\delta u} = f_2 \cdot \cancel{\delta u}$$

$$f_1 = f_2$$

となり、 f_1 と f_2 がつり合っていることになる。

2.2 弾性体の場合



仮想変位による仮想仕事をゼロとすると、

$$f \cdot \delta u - k \cdot u \cdot \delta u = 0$$

これを变形して、

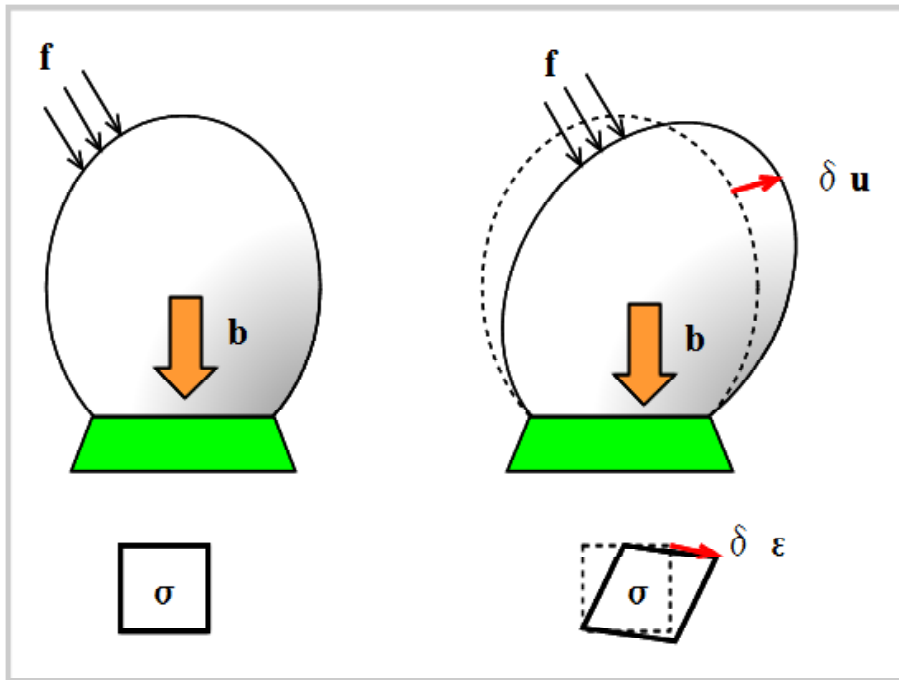
$$f \cdot \delta u - k \cdot u \cdot \delta u = 0$$

$$f \cdot \cancel{\delta u} = k \cdot u \cdot \cancel{\delta u}$$

$$f = k \cdot u$$

となる。

2.3 連続体の場合



連続体にかかる仮想変位により仮想歪みが発生するので、応力と仮想歪みの積で仮想仕事になるのでこれを全体に体積全体で積分する。

$$\iiint_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dV - \iiint_V (b_x \delta u + b_y \delta v + b_z \delta w) dV - \iint_S (f_x \delta u + f_y \delta v + f_z \delta w) dS = 0$$

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_V \mathbf{b} \delta \mathbf{u} dV - \int_S \mathbf{f} \delta \mathbf{u} dS = 0$$

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_V \mathbf{b} \delta \mathbf{u} dV + \int_S \mathbf{f} \delta \mathbf{u} dS$$

仮想内部仕事＝仮想外部仕事

3. 微分方程式の近似解法～重み付き残差法

世の中の力学的物理現象の多くは微分方程式(偏微分方程式)で記述される。

偏微分方程式の形によって次のような名称が与えられている。

$$\nabla^2 u = 0 : \text{ラプラス方程式}$$

$$\nabla^2 u = f : \text{ポアソン方程式}$$

$$\nabla^2 u + \lambda u = 0 : \text{ヘルムホルツ方程式}$$

$$\nabla^2 u - u_t = 0 : \text{斉次拡散方程式}$$

$$\nabla^2 u - u_t = f : \text{非斉次拡散方程式}$$

$$\nabla^2 u - u_{tt} = 0 : \text{斉次波動方程式}$$

$$\nabla^2 u - u_{tt} = f : \text{非斉次波動方程式}$$

$$\text{ここで、} \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

微分方程式の厳密解が得られればよいが、実際にはなかなか難しい。

厳密解が得られないなら解を仮定して微分方程式に代入し、残差(Residual)がゼロになれば厳密解になったと考える。

残差(Residual)が小さいほど近似解は厳密解に近くなる。

3.1 ガラーキン法

重み付き残差法の重み関数を試行関数としたもの。



Boris Grigoryevich Galerkin

(ロシア人：1871 ～ 1945)

ロシア帝国、ソビエト(ロシア)の数学者、技術者。
有限要素法の弱形式で使われるガラーキン法で有名。

ここで、ポアソン型の常微分方程式を解くことを考える。

微分方程式：

$$\frac{d^2u}{dx^2} + f(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

境界条件：

$$u(0) = 0, \quad \frac{du}{dx}(1) = 1$$

u の近似解を $\tilde{u}$ としたときに元の微分方程式に代入し、

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} + f(x) = R(x)$$

残差 $R(x)$ が 0 であれば厳密解となる。

重み付き残差法では残差 $R(x)$ に重み関数 $w(x)$ を乗じて、領域全体で積分した値をゼロとするようにする。

ガラーキン法では重み関数＝試行関数、 $w_i = \phi_i$ として近似解を求める。

<ガラーキン法の式展開>

境界条件 $u(0) = 0$ を満たすように試行関数を選び、残差の重み付き積分を考える。

$$\phi_i(0) = 0 \quad , \quad (i = 1, 2, \dots, n, \text{ 近似の項数だけの } n \text{ が必要})$$

$$\tilde{u} = \sum_{j=1}^n a_j \phi_j$$

として、

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} + f(x) = R(x)$$

について、

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} + f(x) \right) \phi_i(x) dx = 0$$

すなわち、

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2 \left(\tilde{u} = \sum_{j=1}^n a_j \phi_j \right)}{dx^2} + f(x) \right) \phi_i(x) dx = 0$$

となるような、 a_j を求める。

つまり、初めの式から改めて見ると

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} + f(x) \right) \phi_i(x) dx = 0$$

$$\int_0^1 \frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} \phi_i(x) dx + \int_0^1 f(x) \phi_i(x) dx = 0$$

ここで、第1項を部分積分する。

部分積分は

$$\int f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) dx$$

$f(x) = \frac{d\tilde{u}}{dx}$ 、 $g(x) = \phi_i(x)$ とすれば

$$\int_0^1 \frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} \phi_i(x) dx = \left[\frac{d\tilde{u}}{dx} \phi_i(x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{d\tilde{u}}{dx} \frac{d\phi_i(x)}{dx} dx$$

となるので、これを代入し

$$\left[\frac{d\tilde{u}}{dx} \phi_i(x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{d\tilde{u}}{dx} \frac{d\phi_i(x)}{dx} dx + \int_0^1 f(x) \phi_i(x) dx = 0$$

$$\int_0^1 \frac{d\tilde{u}}{dx} \frac{d\phi_i(x)}{dx} dx = \int_0^1 f(x) \phi_i(x) dx + \left[\frac{d\tilde{u}}{dx} \phi_i(x) \right]_0^1$$

ここで、 $\tilde{u} = \sum_{j=1}^n a_j \phi_j(x)$ を代入し

$$\int_0^1 \frac{d}{dx} \left(\sum_{j=1}^n a_j \phi_j(x) \right) \frac{d\phi_i(x)}{dx} dx = \int_0^1 f(x) \phi_i(x) dx + \left[\frac{d\tilde{u}}{dx} \phi_i(x) \right]_0^1$$

左辺の a_j は x の関数ではないので積分の表に出して

$$\sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 \frac{d\phi_j(x)}{dx} \frac{d\phi_i(x)}{dx} dx \right) a_j = \int_0^1 f(x) \phi_i(x) dx + \left[\frac{d\tilde{u}}{dx} \phi_i(x) \right]_0^1$$

右辺第2項も1、0を代入して整理すると

$$\sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 \frac{d\phi_i(x)}{dx} \frac{d\phi_j(x)}{dx} dx \right) a_j = \int_0^1 f(x) \phi_i(x) dx + \frac{d\tilde{u}}{dx}(1) \phi_i(1) - \frac{d\tilde{u}}{dx}(0) \phi_i(0)$$

ここで、 $\phi_i(x)$ は $i=1, 2, \dots, n$ であることを考えて、左辺を行列で表せば

$$\sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx \right) a_j = \begin{bmatrix} \int_0^1 \frac{d\phi_1}{dx} \frac{d\phi_1}{dx} dx & \cdots & \int_0^1 \frac{d\phi_1}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx & \cdots & \int_0^1 \frac{d\phi_1}{dx} \frac{d\phi_n}{dx} dx \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \int_0^1 \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_1}{dx} dx & \cdots & \int_0^1 \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx & \cdots & \int_0^1 \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_n}{dx} dx \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^1 \frac{d\phi_n}{dx} \frac{d\phi_1}{dx} dx & \cdots & \int_0^1 \frac{d\phi_n}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx & \cdots & \int_0^1 \frac{d\phi_n}{dx} \frac{d\phi_n}{dx} dx \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

となるので、

$$K_{ij} = \int_0^1 \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx$$

$$F_i = \int_0^1 f(x) \phi_i(x) dx + \frac{d\tilde{u}}{dx}(1) \phi_i(1) - \frac{d\tilde{u}}{dx}(0) \phi_i(0)$$

となり、行列で表示すれば

$$[K]\{a\} = \{F\}$$

となる。

$$\{a\} = [K]^{-1} \{F\}$$

を計算することにより、 a_j を求めることができる。

3.2 例題

微分方程式：

$$\frac{d^2u}{dx^2} + f(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

境界条件：

$$u(0) = 0, \quad \frac{du}{dx}(1) = 1$$

で、 $f(x) = x$ のとき、試行関数を $\phi_1(x) = x$ 、 $\phi_2(x) = x^2$ として近似解を求めよ。

<例題の厳密解>

$$\frac{d^2u}{dx^2} + f(x) = 0$$

$$u(0) = 0, \quad \frac{du}{dx}(1) = 1$$

で、 $f(x) = x$ のときの u の解

$$\frac{d^2u}{dx^2} + x = 0$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -x$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{2}x^2 + C_1$$

$$u = -\frac{1}{6}x^3 + C_1x + C_2$$

以上のように一般解は求められるから、初期条件より

$$\frac{du}{dx}(1) = -\frac{1}{2} \times 1^2 + C_1 = 1$$

$$-\frac{1}{2} + C_1 = 1$$

$$C_1 = \frac{3}{2}$$

$$u(0) = -\frac{1}{6} \times 0^3 + C_1 \times 0 + C_2 = 0$$

$$C_2 = 0$$

ゆえに

$$u = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x$$

となる。

3.3 ガラーキン法による例題の解

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= \sum_{i=1}^2 a_i \phi_i \\ &= a_1 \phi_1 + a_2 \phi_2 \\ &= a_1 x + a_2 x^2\end{aligned}$$

の2次式で解を近似しているのだ。

$$\begin{array}{ll}\phi_1 = x & \frac{d\phi_1}{dx} = 1 \\ \phi_2 = x^2 & \frac{d\phi_2}{dx} = 2x\end{array} \quad \text{であるから}$$

よって

$$K_{ij} = \int_0^1 \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx$$

より

$$\begin{aligned}
K_{11} &= \int_0^1 \frac{d\phi_1}{dx} \frac{d\phi_1}{dx} dx \\
&= \int_0^1 (1 \times 1) dx \\
&= \int_0^1 dx \\
&= [x]_0^1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{12} &= \int_0^1 \frac{d\phi_1}{dx} \frac{d\phi_2}{dx} dx \\
&= \int_0^1 (1 \times 2x) dx \\
&= \int_0^1 2x dx \\
&= [x^2]_0^1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{21} &= \int_0^1 \frac{d\phi_2}{dx} \frac{d\phi_1}{dx} dx \\
&= K_{12} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{22} &= \int_0^1 \frac{d\phi_2}{dx} \frac{d\phi_2}{dx} dx \\
&= \int_0^1 2x \cdot 2x \cdot dx \\
&= 4 \int_0^1 x^2 dx \\
&= 4 \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 \\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

よって、

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

一方、

$$F_i = \int_0^1 f(x) \phi_i(x) dx + \frac{d\tilde{u}}{dx}(1) \phi_i(1) - \frac{d\tilde{u}}{dx}(0) \phi_i(0)$$

より

$$F_1 = \int_0^1 f(x) \phi_1(x) dx + \frac{d\tilde{u}}{dx}(1) \phi_1(1) - \frac{d\tilde{u}}{dx}(0) \phi_1(0)$$

$$F_2 = \int_0^1 f(x) \phi_2(x) dx + \frac{d\tilde{u}}{dx}(1) \phi_2(1) - \frac{d\tilde{u}}{dx}(0) \phi_2(0)$$

また、

$$\frac{d\tilde{u}}{dx} = a_1 + 2a_2x$$

より

$$\frac{d\tilde{u}}{dx}(1) = a_1 + 2a_2$$

$$\frac{d\tilde{u}}{dx}(0) = a_1$$

ただし、

$$\frac{du}{dx}(1) = 1 \quad \text{より} \quad \frac{d\tilde{u}}{dx}(1) = 1$$

また、

$$\phi_1(x) = x, \quad \phi_2(x) = x^2$$

より

$$\phi_1(0) = 0 \quad \phi_2(0) = 0$$

$$\phi_1(1) = 1, \quad \phi_2(1) = 1$$

であるから、

$$\begin{aligned}
F_1 &= \int_0^1 f(x) \phi_1(x) dx + \frac{d\tilde{u}}{dx}(1) \phi_1(1) - \frac{d\tilde{u}}{dx}(0) \phi_1(0) \\
&= \int_0^1 x \cdot x dx + 1 \times 1 - a_1 \times 0 = \int_0^1 x^2 dx + 1 \\
&= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 + 1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

従って、

$$[F] = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

よって、

$$[K] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4/3 \end{bmatrix}, \quad [F] = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 5/4 \end{pmatrix}$$

より、 $[K]$ の逆行列を求めると

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
F_2 &= \int_0^1 f(x) \phi_2(x) dx + \frac{d\tilde{u}}{dx}(1) \phi_2(1) - \frac{d\tilde{u}}{dx}(0) \phi_2(0) \\
&= \int_0^1 x \cdot x^2 dx + 1 \times 1 - a_1 \times 0 = \int_0^1 x^3 dx + 1 \\
&= \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 + 1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}
\end{aligned}$$

$$[K]^{-1} = \frac{1}{1 \times \frac{4}{3} - 1 \times 1} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

であり、

$$[K]\{a\} = \{F\}$$

$$\{a\} = [K]^{-1} \{F\}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times \frac{4}{3} - 3 \times \frac{5}{4} \\ -3 \times \frac{4}{3} + 3 \times \frac{5}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{12} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

つまり

$$\{a\} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{12} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{aligned} a_1 &= \frac{19}{12} \\ a_2 &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

である。

従って、ガラーキン法による近似解は

$$\tilde{u} = \frac{19}{12}x - \frac{1}{4}x^2$$

となる。

3.4 3乗の項での関数近似

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= \sum_{i=1}^3 a_i \phi_i \\ &= a_1 \phi_1 + a_2 \phi_2 + a_3 \phi_3\end{aligned}$$

ここで、

$$\phi_1 = x, \quad \phi_2 = x^2, \quad \phi_3 = x^3$$

$$\frac{d\phi_1}{dx} = 1, \quad \frac{d\phi_2}{dx} = 2x, \quad \frac{d\phi_3}{dx} = 3x^2$$

$$\tilde{u} = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$\frac{d\tilde{u}}{dx} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$$

である。

$$K_{ij} = \int_0^1 \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx$$

であるから、

$$\begin{aligned}K_{11} &= \int_0^1 \frac{d\phi_1}{dx} \frac{d\phi_1}{dx} dx \\ &= 1\end{aligned}$$

2次近似の結果が使える。

$$K_{12} = \int_0^1 \frac{d\phi_1}{dx} \frac{d\phi_2}{dx} dx$$

$$= 1 \quad \text{2 次近似の結果が使える。}$$

$$K_{13} = \int_0^1 \frac{d\phi_1}{dx} \frac{d\phi_3}{dx} dx = \int_0^1 1 \times 3x^2 \cdot dx = \int_0^1 3x^2 dx = \left[x^3 \right]_0^1$$

$$= 1$$

$$K_{21} = \int_0^1 \frac{d\phi_2}{dx} \frac{d\phi_1}{dx} dx$$

$$= K_{12}$$

$$= 1 \quad \text{2 次近似の結果が使える。}$$

$$K_{22} = \int_0^1 \frac{d\phi_2}{dx} \frac{d\phi_2}{dx} dx$$

$$= \frac{4}{3} \quad \text{2 次近似の結果が使える。}$$

$$K_{23} = \int_0^1 \frac{d\phi_2}{dx} \frac{d\phi_3}{dx} dx = \int_0^1 2x \times 3x^2 \cdot dx = \int_0^1 6x^3 dx = \left[\frac{6}{4} x^4 \right]_0^1 = \frac{6}{4}$$

$$= \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned}
K_{31} &= \int_0^1 \frac{d\phi_3}{dx} \frac{d\phi_1}{dx} dx \\
&= K_{13} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{32} &= \int_0^1 \frac{d\phi_3}{dx} \frac{d\phi_2}{dx} dx \\
&= K_{23} \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{33} &= \int_0^1 \frac{d\phi_3}{dx} \frac{d\phi_3}{dx} dx = \int_0^1 3x^2 \times 3x^2 \cdot dx = \int_0^1 9x^4 dx = \left[\frac{9}{5} x^5 \right]_0^1 \\
&= \frac{9}{5}
\end{aligned}$$

従って、

$$[K] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4/3 & 3/2 \\ 1 & 3/2 & 9/5 \end{bmatrix}$$

$$[K]^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -18 & 10 \\ -18 & 48 & -30 \\ 10 & -30 & 20 \end{bmatrix}$$

一方、 F_i は

$$F_i = \int_0^1 f(x) \phi_i(x) dx + \frac{d\tilde{u}}{dx}(1) \phi_i(1) - \frac{d\tilde{u}}{dx}(0) \phi_i(0)$$

より

$$F_1 = \int_0^1 f(x) \phi_1(x) dx + \frac{d\tilde{u}}{dx}(1) \phi_1(1) - \frac{d\tilde{u}}{dx}(0) \phi_1(0)$$

$$F_2 = \int_0^1 f(x) \phi_2(x) dx + \frac{d\tilde{u}}{dx}(1) \phi_2(1) - \frac{d\tilde{u}}{dx}(0) \phi_2(0)$$

$$F_3 = \int_0^1 f(x) \phi_3(x) dx + \frac{d\tilde{u}}{dx}(1) \phi_3(1) - \frac{d\tilde{u}}{dx}(0) \phi_3(0)$$

であり、 F_1 、 F_2 は 2 次近似と同じである。

$$F_1 = \frac{4}{3}$$

$$F_2 = \frac{5}{4}$$

$$\begin{aligned}
F_3 &= \int_0^1 f(x) \phi_3(x) dx + \frac{d\tilde{u}}{dx}(1) \phi_3(1) - \frac{d\tilde{u}}{dx}(0) \phi_3(0) \\
&= \int_0^1 x \cdot x^3 dx + 1 \times 1 - a_1 \times 0 = \int_0^1 x^4 dx + 1 = \left[\frac{1}{5} x^5 \right]_0^1 + 1 = \frac{1}{5} + 1 \\
&= \frac{6}{5}
\end{aligned}$$

より、

$$\{F\} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 5/4 \\ 6/5 \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\{a\} = [K]^{-1} \{F\}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & -18 & 10 \\ -18 & 48 & -30 \\ 10 & -30 & 20 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 4/3 \\ 5/4 \\ 6/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ -1/6 \end{pmatrix}$$

つまり

$$\{a\} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{aligned} a_1 &= \frac{3}{2} \\ a_2 &= 0 \\ a_3 &= -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

である。

従って、ガラーキン法による近似解は

$$\tilde{u} = \frac{3}{2}x - \frac{1}{6}x^3$$

となり、厳密解と一致する。

3.5 1 乗の項で関数近似

1 乗で近似すると、

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^1 a_i \phi_i = a_1 \phi_1$$

$$\phi_1 = x \quad \text{であるから} \quad \frac{d\phi_1}{dx} = 1$$

2 乗近似の結果を使って

$$K_{11} = \int_0^1 \frac{d\phi_1}{dx} \frac{d\phi_1}{dx} dx = 1$$

$$F_1 = \int_0^1 f(x) \phi_1(x) dx + \frac{d\tilde{u}}{dx}(1) \phi_1(1) - \frac{d\tilde{u}}{dx}(0) \phi_1(0) = \frac{4}{3}$$

$$[K]\{a\} = \{F\}$$

$$K_{11} \cdot a_1 = F_1$$

$$a_1 = \frac{F_1}{K_{11}} = \frac{4}{3}$$

従って、ガラーキン法による近似解は

$$\tilde{u} = \frac{4}{3}x$$

となる。

3.6 各次数近似の比較

4 乗、5 乗での関数近似まで計算してまとめると、

$$1 \text{ 乗近似} : \tilde{u} = \frac{4}{3}x$$

$$2 \text{ 乗近似} : \tilde{u} = \frac{19}{12}x - \frac{1}{4}x^2$$

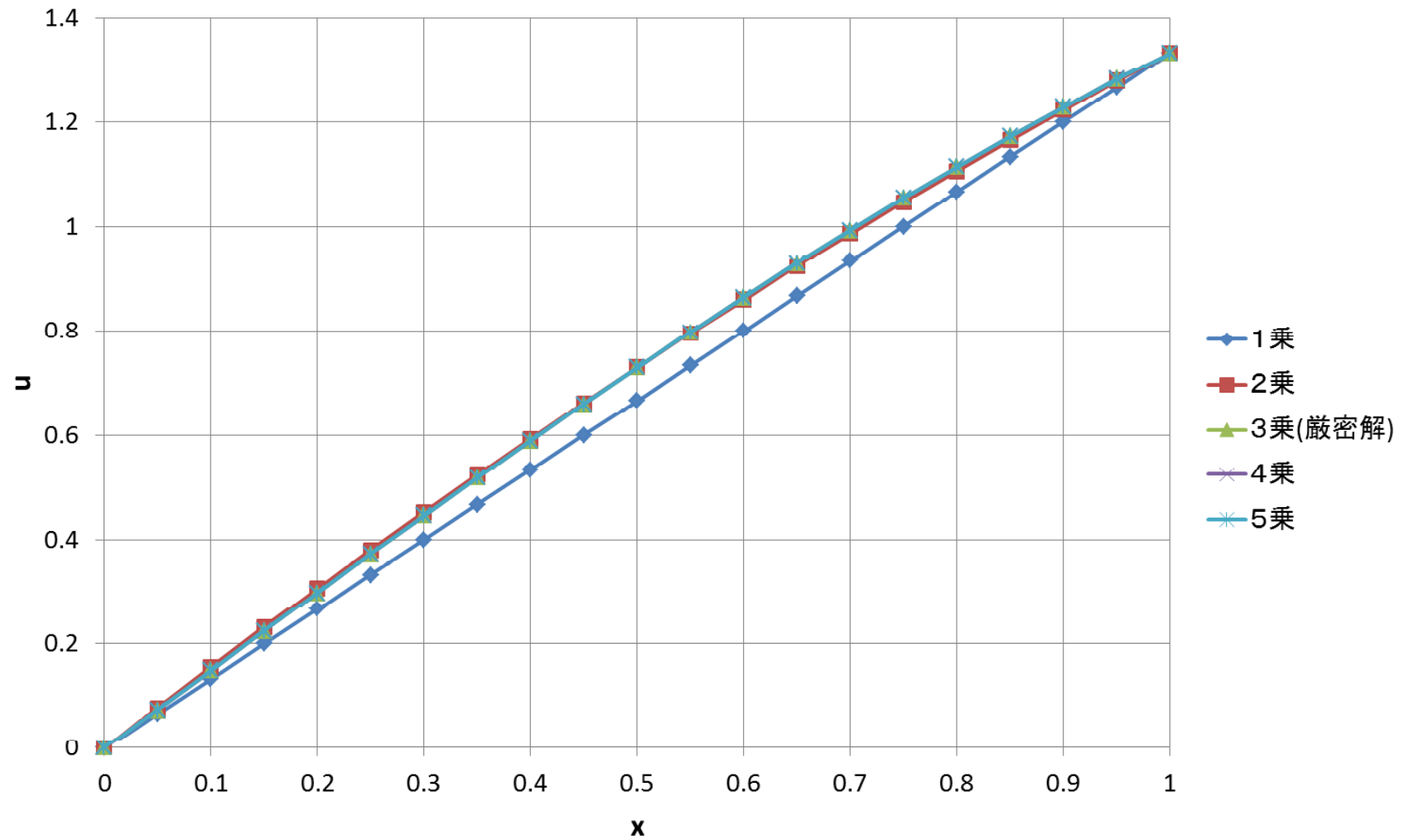
$$3 \text{ 乗近似} : \tilde{u} = \frac{3}{2}x - \frac{1}{6}x^3 \quad < \text{--- 厳密解と一致}$$

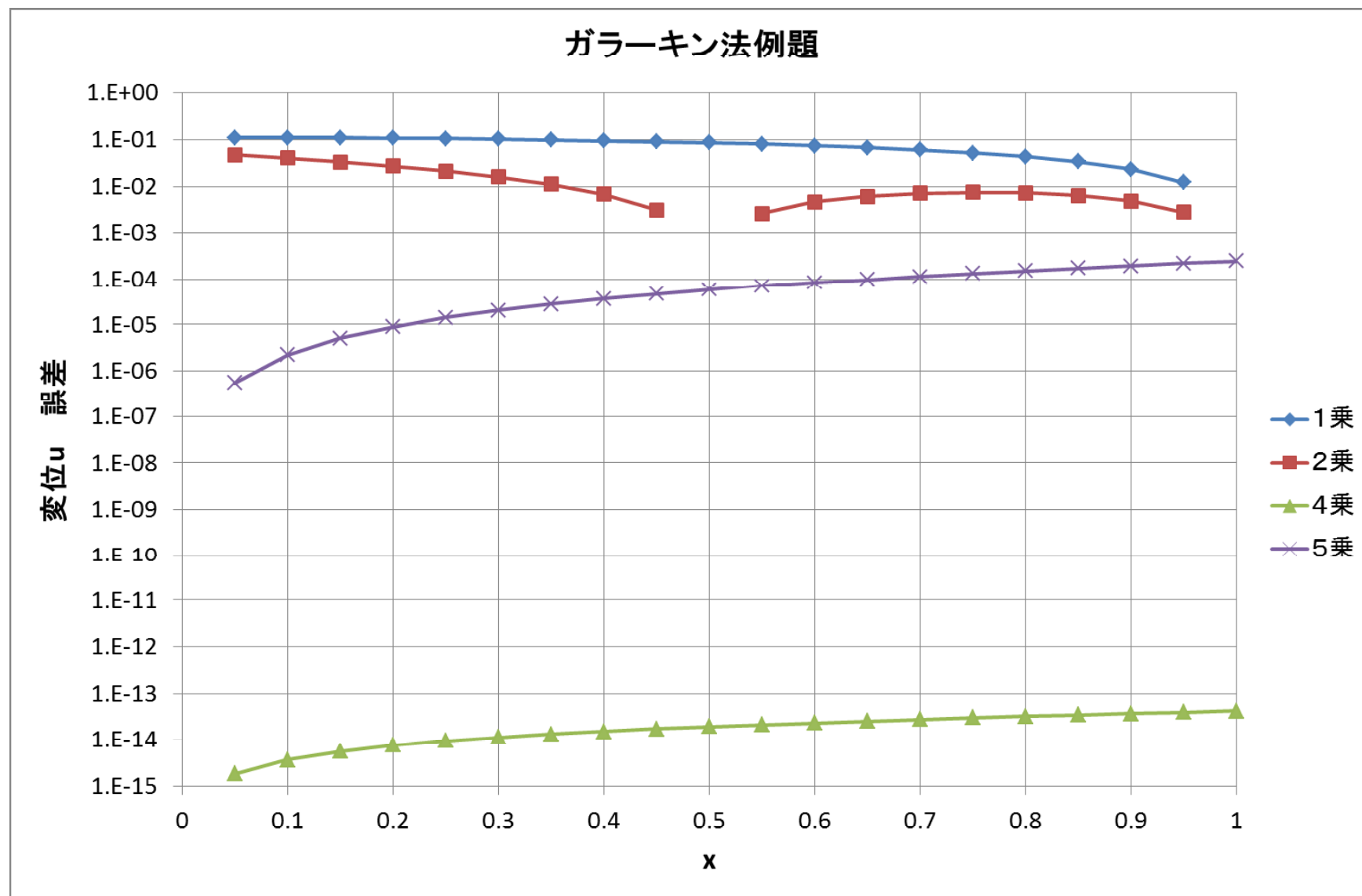
$$4 \text{ 乗近似} : \tilde{u} = \frac{3}{2}x - 5.684 \times 10^{-14}x^2 - \frac{1}{6}x^3$$

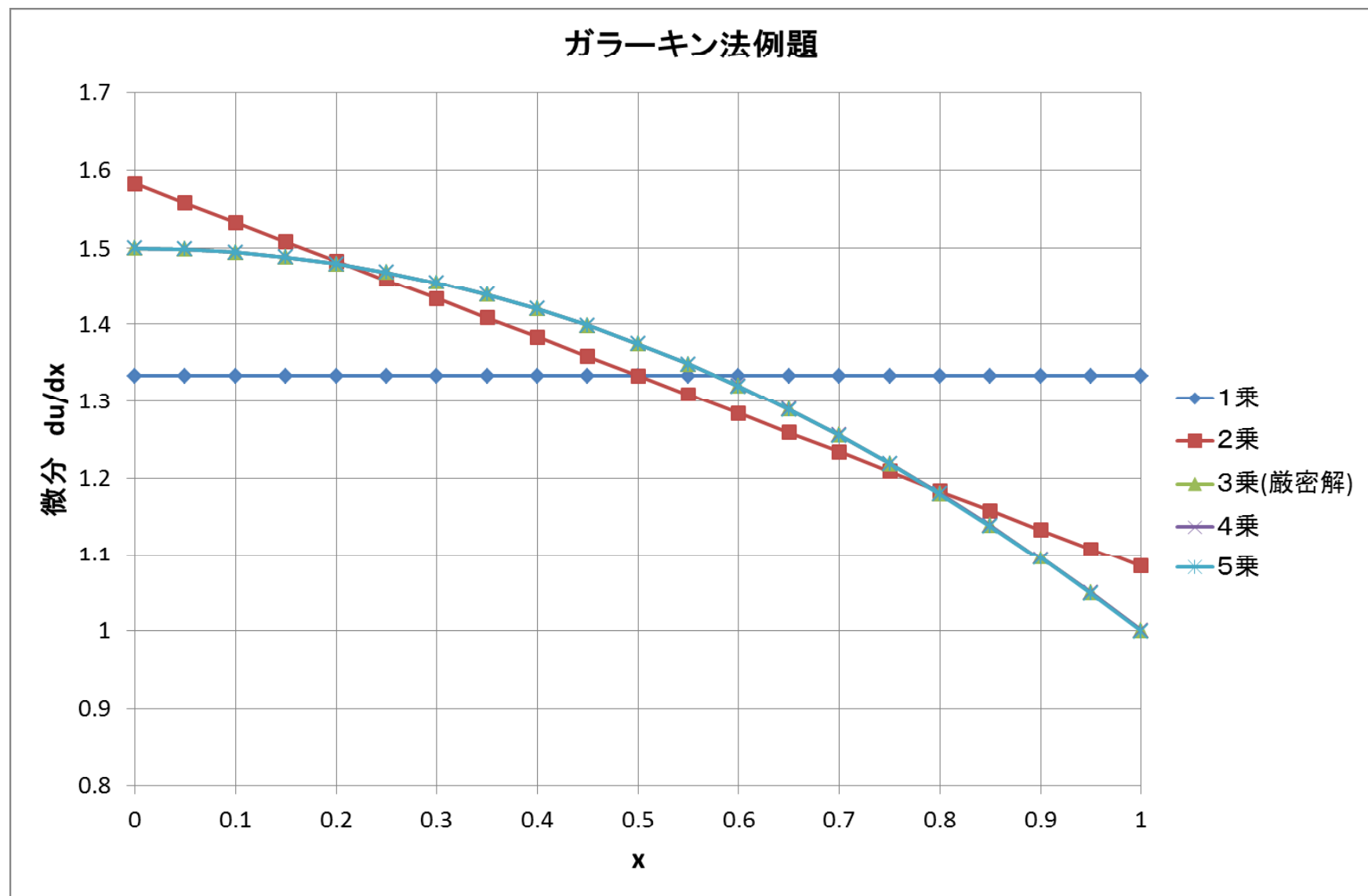
$$5 \text{ 乗近似} : \tilde{u} = 1.50x - 8.64 \times 10^{-12}x^2 - 0.167x^3 - 9.095 \times 10^{-13}x^5$$

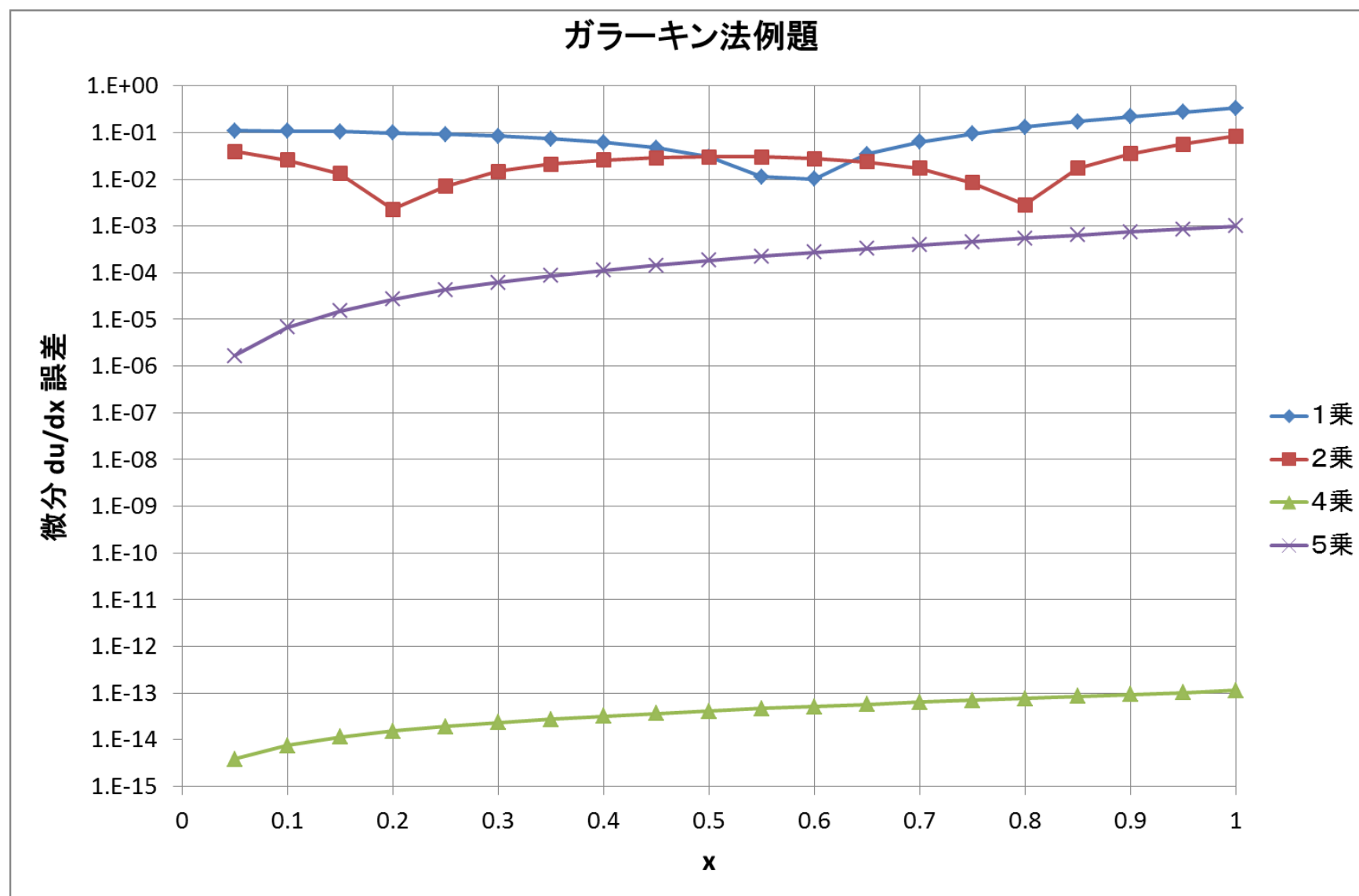
となり、次数を上げると近似解は厳密解に近づくが厳密解に一致するわけではない。

ガラーキン法例題







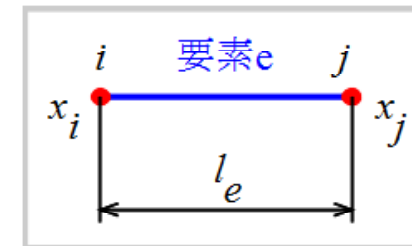


4. 有限要素法

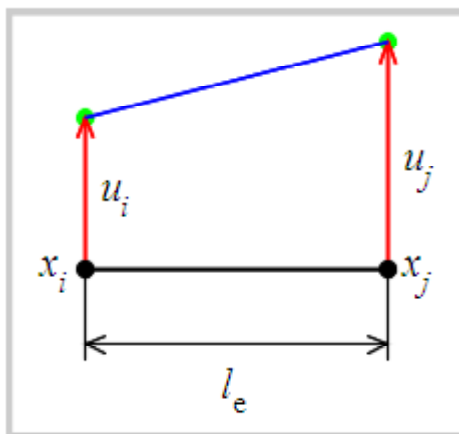
近似の次数を上げるのではなく、計算する領域を分割して計算精度を上げる。

領域をいくつか分割して領域ごとに $[K]$ 、 $\{F\}$ を計算し足し合わせて全体の変位を求める。

$$\int_0^1 \square dx = \int_0^{x_1} \square dx + \int_{x_1}^{x_2} \square dx + \cdots + \int_{x_n}^1 \square dx$$



4.1 一次元線形要素法



$$\tilde{u}(x) = c_0 + c_1 x \quad x_i \leq x \leq x_j$$

両端での条件

x_i で u_i 、 x_j で u_j であるから

$$\tilde{u}(x_i) = u_i = c_0 + c_1 x_i$$

$$\tilde{u}(x_j) = u_j = c_0 + c_1 x_j$$

行列で表せば

$$\begin{pmatrix} u_i \\ u_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}$$

c_0 、 c_1 について解く

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_j \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{x_j - x_i} \begin{pmatrix} x_j & -x_i \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{l_e} \begin{pmatrix} u_i x_j - u_j x_i \\ u_j - u_i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで、 $l_e = x_j - x_i$

よって、

$$c_0 = \frac{u_i x_j - u_j x_i}{l_e}$$

$$c_1 = \frac{u_j - u_i}{l_e}$$

$\tilde{u}(x) = c_0 + c_1 x$ をこの c_0 、 c_1 で表すと

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x) &= \frac{u_i x_j - u_j x_i}{l_e} + \frac{u_j - u_i}{l_e} x \\ &= \frac{x_j - x}{l_e} u_i + \frac{x - x_i}{l_e} u_j\end{aligned}$$

ここで、 $\xi = \frac{x - x_i}{l_e}$ とおくと、

$$\begin{aligned}1 - \xi &= 1 - \frac{x - x_i}{l_e} \\ &= \frac{l_e - x + x_i}{l_e} \\ &= \frac{x_j - \cancel{x_i} - x + \cancel{x_i}}{l_e} \\ &= \frac{x_j - x}{l_e}\end{aligned}$$

であるから

$$\tilde{u}(x) = (1 - \xi)u_i + \xi u_j$$

となる。ここで、

$$N_i(\xi) = 1 - \xi$$

$$N_j(\xi) = \xi$$

と置けば

$$\tilde{u}(x) = N_i(\xi)u_i + N_j(\xi)u_j$$

ここで、 $\tilde{u}(x)$ を x で微分すると

$$N_i(\xi) = 1 - \xi = \frac{x_j - x}{l_e}$$

$$N_j(\xi) = \xi = \frac{x - x_i}{l_e}$$

である。 N_i 、 N_j を形状関数または内挿関数という。

$N_i(\xi)$ 、 $N_j(\xi)$ は x の関数であるので

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{u}}{dx} &= \frac{dN_i}{dx}u_i + \frac{dN_j}{dx}u_j \\ &= \frac{dN_i}{d\xi} \frac{d\xi}{dx}u_i + \frac{dN_j}{d\xi} \frac{d\xi}{dx}u_j\end{aligned}$$

ここで、 $\xi = \frac{x - x_i}{l_e}$ であるから微分すると $\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{l_e}$ であり、

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{u}}{dx} &= \frac{dN_i}{d\xi} \frac{1}{l_e} u_i + \frac{dN_j}{d\xi} \frac{1}{l_e} u_j \\
&= \frac{1}{l_e} \left(\frac{dN_i}{d\xi} u_i + \frac{dN_j}{d\xi} u_j \right) \\
&= \frac{1}{l_e} \begin{pmatrix} \frac{dN_i}{d\xi} & \frac{dN_j}{d\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となる。

4.2 ガラーキン法の適用

$$\int_0^1 \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\tilde{u}}{dx} dx = \int_0^1 f(x) \phi_i(x) dx + \left[\frac{d\tilde{u}}{dx}(x) \phi_i(x) \right]_0^1$$

の式で

$\phi_i \rightarrow N_i$ とし積分範囲を $0 \sim 1$ を $x_i \sim x_j$ とすれば、

$$\int_{x_i}^{x_j} \frac{dN_i}{dx} \frac{d\tilde{u}}{dx} dx = \int_{x_i}^{x_j} f(x) N_i(x) dx + \left[\frac{d\tilde{u}}{dx}(x) N_i(x) \right]_{x_i}^{x_j}$$

ここで、 $\frac{d\tilde{u}}{dx} = \frac{1}{l_e} \begin{pmatrix} \frac{dN_i}{d\xi} & \frac{dN_j}{d\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \end{pmatrix}$ を代入すると

$$\int_{x_i}^{x_j} \frac{dN_i}{dx} \frac{1}{l_e} \left(\frac{dN_i}{d\xi} \quad \frac{dN_j}{d\xi} \right) \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \end{pmatrix} dx = \int_{x_i}^{x_j} f(x) N_i(x) dx + \frac{d\tilde{u}}{dx}(x_j) N_i(x_j) - \frac{d\tilde{u}}{dx}(x_i) N_i(x_i)$$

さらに、 N_i に関して $x \rightarrow \xi$ に書き換える。

$$\xi = \frac{x - x_i}{l_e} \text{ より } dx = l_e d\xi, \quad \begin{matrix} x: x_i \rightarrow x_j \\ \xi: 0 \rightarrow 1 \end{matrix} \text{ であるから左辺は}$$

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_j} \frac{dN_i}{dx} \frac{1}{l_e} \left(\frac{dN_i}{d\xi} \quad \frac{dN_j}{d\xi} \right) \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \end{pmatrix} dx &= \int_0^1 \frac{dN_i}{l_e d\xi} \frac{1}{l_e} \left(\frac{dN_i}{d\xi} \quad \frac{dN_j}{d\xi} \right) \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \end{pmatrix} l_e d\xi \\ &= \frac{1}{l_e} \int_0^1 \frac{dN_i}{d\xi} \left(\frac{dN_i}{d\xi} \quad \frac{dN_j}{d\xi} \right) d\xi \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \end{pmatrix} \end{aligned}$$

次に右辺第 1 項は $N_i(\xi) = 1 - \xi = \frac{x_j - x}{l_e} = N_i(x)$ であるから

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_j} f(x) N_i(x) dx &= \int_0^1 f(\xi) N_i(\xi) l_e d\xi \\ &= l_e \int_0^1 f(\xi) N_i(\xi) d\xi \end{aligned}$$

また、 $N_i(x_j) \rightarrow N_i(1)$ と変換されるから、
 $N_i(x_i) \rightarrow N_i(0)$

$$\frac{1}{l_e} \int_0^1 \frac{dN_i}{d\xi} \left(\frac{dN_i}{d\xi} \quad \frac{dN_j}{d\xi} \right) d\xi \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \end{pmatrix} = l_e \int_0^1 f(\xi) N_i(\xi) d\xi + \frac{d\tilde{u}}{dx}(x_j) N_i(1) - \frac{d\tilde{u}}{dx}(x_i) N_i(0)$$

同様に $N_i \rightarrow N_j$ とすれば、

$$\frac{1}{l_e} \int_0^1 \frac{dN_j}{d\xi} \left(\frac{dN_i}{d\xi} \quad \frac{dN_j}{d\xi} \right) d\xi \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \end{pmatrix} = l_e \int_0^1 f(x) N_j(\xi) d\xi + \frac{d\tilde{u}}{dx}(x_j) N_j(1) - \frac{d\tilde{u}}{dx}(x_i) N_j(0)$$

$$N_i(\xi) = 1 - \xi \text{ より}$$

$$N_i(1) = 1 - 1 = 0$$

$$N_i(0) = 1 - 0 = 1$$

同様に $N_j(\xi) = \xi$ より

$$N_j(0) = 0$$

$$N_j(1) = 1$$

であるから

$$\begin{cases} \frac{1}{l_e} \int_0^1 \frac{dN_i}{d\xi} \left(\frac{dN_i}{d\xi} \quad \frac{dN_j}{d\xi} \right) d\xi \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \end{pmatrix} = l_e \int_0^1 f(x) N_i(\xi) d\xi + \cancel{\frac{d\tilde{u}}{dx}(x_j) N_i(1)} - \cancel{\frac{d\tilde{u}}{dx}(x_i) N_i(0)} \\ \frac{1}{l_e} \int_0^1 \frac{dN_j}{d\xi} \left(\frac{dN_i}{d\xi} \quad \frac{dN_j}{d\xi} \right) d\xi \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \end{pmatrix} = l_e \int_0^1 f(x) N_j(\xi) d\xi + \cancel{\frac{d\tilde{u}}{dx}(x_j) N_j(1)} - \cancel{\frac{d\tilde{u}}{dx}(x_i) N_j(0)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{l_e} \int_0^1 \frac{dN_i}{d\xi} \left(\frac{dN_i}{d\xi} & \frac{dN_j}{d\xi} \right) d\xi \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \end{pmatrix} = l_e \int_0^1 f(x) N_i(\xi) d\xi - \frac{d\tilde{u}}{dx}(x_i) \\ \frac{1}{l_e} \int_0^1 \frac{dN_j}{d\xi} \left(\frac{dN_i}{d\xi} & \frac{dN_j}{d\xi} \right) d\xi \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \end{pmatrix} = l_e \int_0^1 f(x) N_j(\xi) d\xi + \frac{d\tilde{u}}{dx}(x_j) \end{cases}$$

$$\frac{1}{l_e} \int_0^1 \begin{bmatrix} \left(\frac{dN_i}{d\xi} \right)^2 & \frac{dN_i}{d\xi} \frac{dN_j}{d\xi} \\ \frac{dN_j}{d\xi} \frac{dN_i}{d\xi} & \left(\frac{dN_j}{d\xi} \right)^2 \end{bmatrix} d\xi \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \end{pmatrix} = l_e \int_0^1 f(x) \begin{Bmatrix} N_i(\xi) \\ N_j(\xi) \end{Bmatrix} d\xi + \begin{Bmatrix} -\frac{d\tilde{u}}{dx}(x_i) \\ \frac{d\tilde{u}}{dx}(x_j) \end{Bmatrix}$$

ここで、

$$[k_e] = \frac{1}{l_e} \int_0^1 \begin{bmatrix} \left(\frac{dN_i}{d\xi} \right)^2 & \frac{dN_i}{d\xi} \frac{dN_j}{d\xi} \\ \frac{dN_j}{d\xi} \frac{dN_i}{d\xi} & \left(\frac{dN_j}{d\xi} \right)^2 \end{bmatrix} d\xi$$

$$\{u_e\} = \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \end{pmatrix}$$

$$\{f_e\} = l_e \int_0^1 f(x) \begin{Bmatrix} N_i(\xi) \\ N_j(\xi) \end{Bmatrix} d\xi$$

と置けば、

$$[k_e]\{u_e\} = \{f_e\} + \begin{Bmatrix} -\frac{d\tilde{u}}{dx}(x_i) \\ \frac{d\tilde{u}}{dx}(x_j) \end{Bmatrix}$$

ここで、 $N_i(\xi) = 1 - \xi$
 $N_j(\xi) = \xi$ であるから

$$\frac{dN_i}{d\xi} = -1 \quad \frac{dN_j}{d\xi} = 1$$

$$\left(\frac{dN_i}{d\xi}\right)^2 = (-1)^2 = 1 \quad \frac{dN_i}{d\xi} \frac{dN_j}{d\xi} = (-1) \times 1 = -1$$

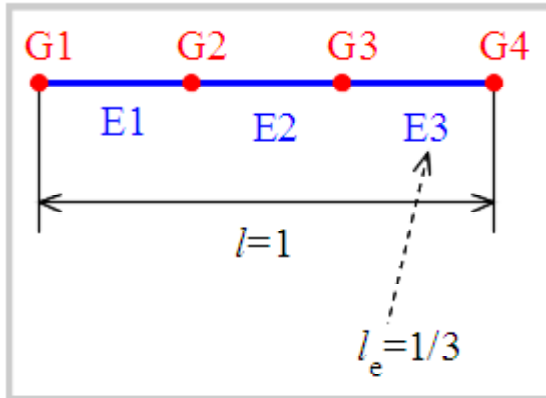
$$\frac{dN_j}{d\xi} \frac{dN_i}{d\xi} = 1 \times (-1) = -1 \quad \left(\frac{dN_j}{d\xi}\right)^2 = 1^2 = 1$$

よって

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{dN_i}{d\xi}\right)^2 & \frac{dN_i}{d\xi} \frac{dN_j}{d\xi} \\ \frac{dN_j}{d\xi} \frac{dN_i}{d\xi} & \left(\frac{dN_j}{d\xi}\right)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
[k_e] &= \frac{1}{l_e} \int_0^1 \begin{bmatrix} \left(\frac{dN_i}{d\xi} \right)^2 & \frac{dN_i}{d\xi} \frac{dN_j}{d\xi} \\ \frac{dN_j}{d\xi} \frac{dN_i}{d\xi} & \left(\frac{dN_j}{d\xi} \right)^2 \end{bmatrix} d\xi \\
&= \frac{1}{l_e} \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} d\xi \\
&= \frac{1}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

4.3 有限要素法の例題



モデルは長さ $l = 1$ を三等分したモデル。

三等分しているので一つの要素の長さは $l_e = \frac{1}{3}$ 。

ここで、要素の一つを取り出し要素座標系として ξ ($0 \leq \xi \leq 1$) を考えると、

$$\xi = \frac{x - x_i}{l_e} \quad 1 - \xi = \frac{x_j - x}{l_e}$$

$$l_e = \frac{x - x_i}{\xi} \quad l_e = \frac{x_j - x}{1 - \xi}$$

より

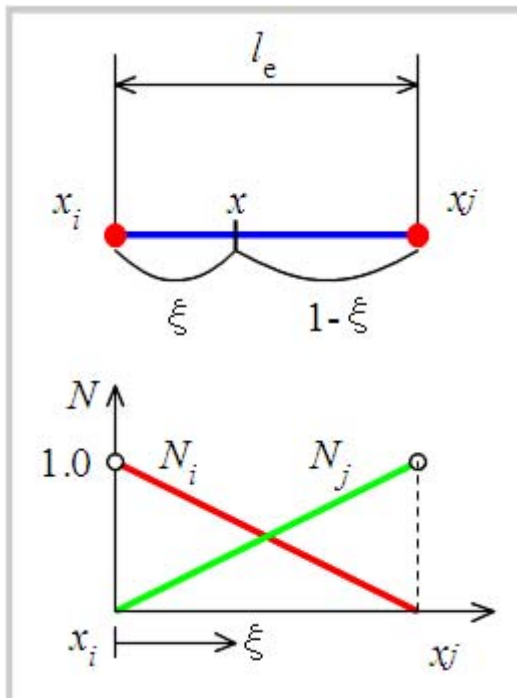
$$\frac{x - x_i}{\xi} = \frac{x_j - x}{1 - \xi}$$

$$(x - x_i)(1 - \xi) = (x_j - x)\xi$$

$$x - \cancel{\xi x} - x_i + x_i \xi = x_j \xi - \cancel{x \xi}$$

$$x = x_j \xi + x_i - x_i \xi$$

$$x = (1 - \xi)x_i + \xi x_j$$



なお、ここで

$$N_i(\xi) = 1 - \xi$$

$$N_j(\xi) = \xi$$

とする。

ここで、 $f(x) = x$ より

$$f(x) = x$$

$$= (1 - \xi)x_i + \xi x_j$$

となる。

要素で考えれば、

$$\begin{aligned}\{f_e\} &= l_e \int_0^1 f(x) \begin{Bmatrix} N_i(\xi) \\ N_j(\xi) \end{Bmatrix} d\xi \\ &= l_e \int_0^1 [(1 - \xi)x_i + \xi x_j] \begin{Bmatrix} N_i(\xi) \\ N_j(\xi) \end{Bmatrix} d\xi \\ &= l_e \int_0^1 [(1 - \xi)x_i + \xi x_j] \begin{Bmatrix} 1 - \xi \\ \xi \end{Bmatrix} d\xi\end{aligned}$$

となる。

1 行目の積分を考えると

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \left[(1-\xi)x_i + \xi x_j \right] (1-\xi) d\xi \\
 &= \int_0^1 \left[x_i - x_i \xi + x_j \xi \right] (1-\xi) d\xi \\
 &= \int_0^1 \left(x_i - x_i \xi + x_j \xi - x_i \xi^2 + x_i \xi^2 - x_j \xi^2 \right) d\xi \\
 &= \left[x_i \xi - \frac{1}{2} x_i \xi^2 + \frac{1}{2} x_j \xi^2 - \frac{1}{2} x_i \xi^2 + \frac{1}{3} x_i \xi^3 - \frac{1}{3} x_j \xi^3 \right]_0^1 \\
 &= x_i - \frac{1}{2} x_i + \frac{1}{2} x_j - \frac{1}{2} x_i + \frac{1}{3} x_i - \frac{1}{3} x_j \\
 &= \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) x_i + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) x_j \\
 &= \frac{1}{3} x_i + \frac{1}{6} x_j
 \end{aligned}$$

となる。

$$\{f_e\} = l_e \begin{Bmatrix} \frac{1}{3} x_i + \frac{1}{6} x_j \\ \frac{1}{6} x_i + \frac{1}{3} x_j \end{Bmatrix}$$

2 行目の積分を考えると

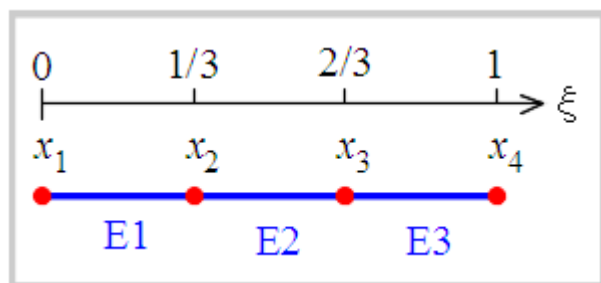
$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \left[(1-\xi)x_i + \xi x_j \right] \xi d\xi \\
 &= \int_0^1 \left(x_i - x_i \xi + x_j \xi \right) \xi d\xi \\
 &= \int_0^1 \left(x_i \xi - x_i \xi^2 + x_j \xi^2 \right) d\xi \\
 &= \left[\frac{1}{2} x_i \xi^2 - \frac{1}{3} x_i \xi^3 + \frac{1}{3} x_j \xi^3 \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{2} x_i - \frac{1}{3} x_i + \frac{1}{3} x_j \\
 &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) x_i + \frac{1}{3} x_j \\
 &= \frac{1}{6} x_i + \frac{1}{3} x_j
 \end{aligned}$$

となるので、

一方、 $[k_e]$ は $l_e = \frac{1}{3}$ であるから、

$$[k_e] = \frac{1}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

ここで、各要素の $\{f_e\}$ を求めると



$$\{f_e\} = l_e \begin{Bmatrix} \frac{1}{3}x_i + \frac{1}{6}x_j \\ \frac{1}{6}x_i + \frac{1}{3}x_j \end{Bmatrix}, \quad l_e = \frac{1}{3}$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{3}, \quad x_3 = \frac{2}{3}, \quad x_4 = 1$$

であるから、

【E1】

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}\{f_1\} &= l_e \begin{Bmatrix} \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{6}x_2 \\ \frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{3}x_2 \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \times 0 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{54} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

ここで、各要素の方程式を求めると

$$[k_e]\{u_e\} = \{f_e\} + \begin{Bmatrix} -\frac{d\tilde{u}}{dx}(x_i) \\ \frac{d\tilde{u}}{dx}(x_j) \end{Bmatrix}$$

より

【E2】

$$x_2 = \frac{1}{3}, \quad x_3 = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned}\{f_2\} &= l_e \begin{Bmatrix} \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{6}x_3 \\ \frac{1}{6}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{54} \begin{Bmatrix} 4 \\ 5 \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

【E3】

$$x_3 = \frac{2}{3}, \quad x_4 = 1$$

$$\begin{aligned}\{f_3\} &= l_e \begin{Bmatrix} \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{6}x_4 \\ \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \times 1 \\ \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times 1 \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{54} \begin{Bmatrix} 7 \\ 8 \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

$$\frac{1}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = l_e \begin{Bmatrix} \frac{1}{3}x_i + \frac{1}{6}x_j \\ \frac{1}{6}x_i + \frac{1}{3}x_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\frac{d\tilde{u}}{dx}(x_i) \\ \frac{d\tilde{u}}{dx}(x_j) \end{Bmatrix}$$

であるから、各要素について

【E1】 $i = 1, j = 2$

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{54} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\frac{d\tilde{u}}{dx}(x_1) \\ \frac{d\tilde{u}}{dx}(x_2) \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{54} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\frac{d\tilde{u}}{dx}(x_1) \\ \frac{d\tilde{u}}{dx}(x_2) \end{Bmatrix}$$

【E2】 $i = 2, j = 3$

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{54} \begin{Bmatrix} 4 \\ 5 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\frac{d\tilde{u}}{dx}(x_2) \\ \frac{d\tilde{u}}{dx}(x_3) \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} \\ k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{54} \begin{Bmatrix} f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\frac{d\tilde{u}}{dx}(x_2) \\ \frac{d\tilde{u}}{dx}(x_3) \end{Bmatrix}$$

【E3】 $i = 3, j = 4$

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{54} \begin{Bmatrix} 7 \\ 8 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\frac{d\tilde{u}}{dx}(x_3) \\ \frac{d\tilde{u}}{dx}(x_4) \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} k_{33} & k_{34} \\ k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{54} \begin{Bmatrix} f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\frac{d\tilde{u}}{dx}(x_3) \\ \frac{d\tilde{u}}{dx}(x_4) \end{Bmatrix}$$

であり、

$$[k]\{u\} = \{f\} + \{D\}$$

つまり、

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{Bmatrix}$$

であるから、

$$[k] = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 3+3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3+3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\{f\} = \frac{1}{54} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2+4 \\ 5+7 \\ 8 \end{Bmatrix} = \frac{1}{54} \begin{Bmatrix} 1 \\ 6 \\ 12 \\ 8 \end{Bmatrix}$$

$$\{D\} = \begin{Bmatrix} -\frac{d\tilde{u}}{dx}(x_1) \\ \frac{d\tilde{u}}{dx}(x_2) - \frac{d\tilde{u}}{dx}(x_2) \\ \frac{d\tilde{u}}{dx}(x_3) - \frac{d\tilde{u}}{dx}(x_3) \\ \frac{d\tilde{u}}{dx}(x_4) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{d\tilde{u}}{dx}(x_1) \\ 0 \\ 0 \\ \frac{d\tilde{u}}{dx}(x_4) \end{Bmatrix}$$

以上を行列式に組み立てると

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{54} \begin{Bmatrix} 1 \\ 6 \\ 12 \\ 8 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\frac{d\tilde{u}}{dx}(x_1) \\ 0 \\ 0 \\ \frac{d\tilde{u}}{dx}(x_4) \end{Bmatrix}$$

ここで、境界条件は

$$u(0) = 0$$

$$\frac{du}{dx}(1) = 1$$

であるから、

$$u_1 = \tilde{u}(x_1) = \tilde{u}(0) = 1$$

$$\frac{d\tilde{u}}{dx}(x_4) = \frac{d\tilde{u}}{dx}(1) = 1$$

となる。

ここで、 $u_1 = 0$ にするためには u_1 に関する各係数は k_{11} 以外はすべて 0 にならなければならない。

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{54} \begin{Bmatrix} 1 \\ 6 \\ 12 \\ 8 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\frac{d\tilde{u}}{dx}(x_1) \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{54} \begin{Bmatrix} 1 - 54 \frac{d\tilde{u}}{dx}(x_1) \\ 6 \\ 12 \\ 62 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{54} \begin{Bmatrix} 1 - 54 \frac{d\tilde{u}}{dx}(x_1) \\ 6 \\ 12 \\ 62 \end{Bmatrix}$$

部分行列を考えて、

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{54} \begin{Bmatrix} 6 \\ 12 \\ 62 \end{Bmatrix}$$

この式を解いて

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{54} \begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 6 \\ 12 \\ 62 \end{Bmatrix} = \frac{1}{54} \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 6 \\ 12 \\ 62 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 40/81 \\ 77/81 \\ 4/3 \end{Bmatrix}$$

となる。

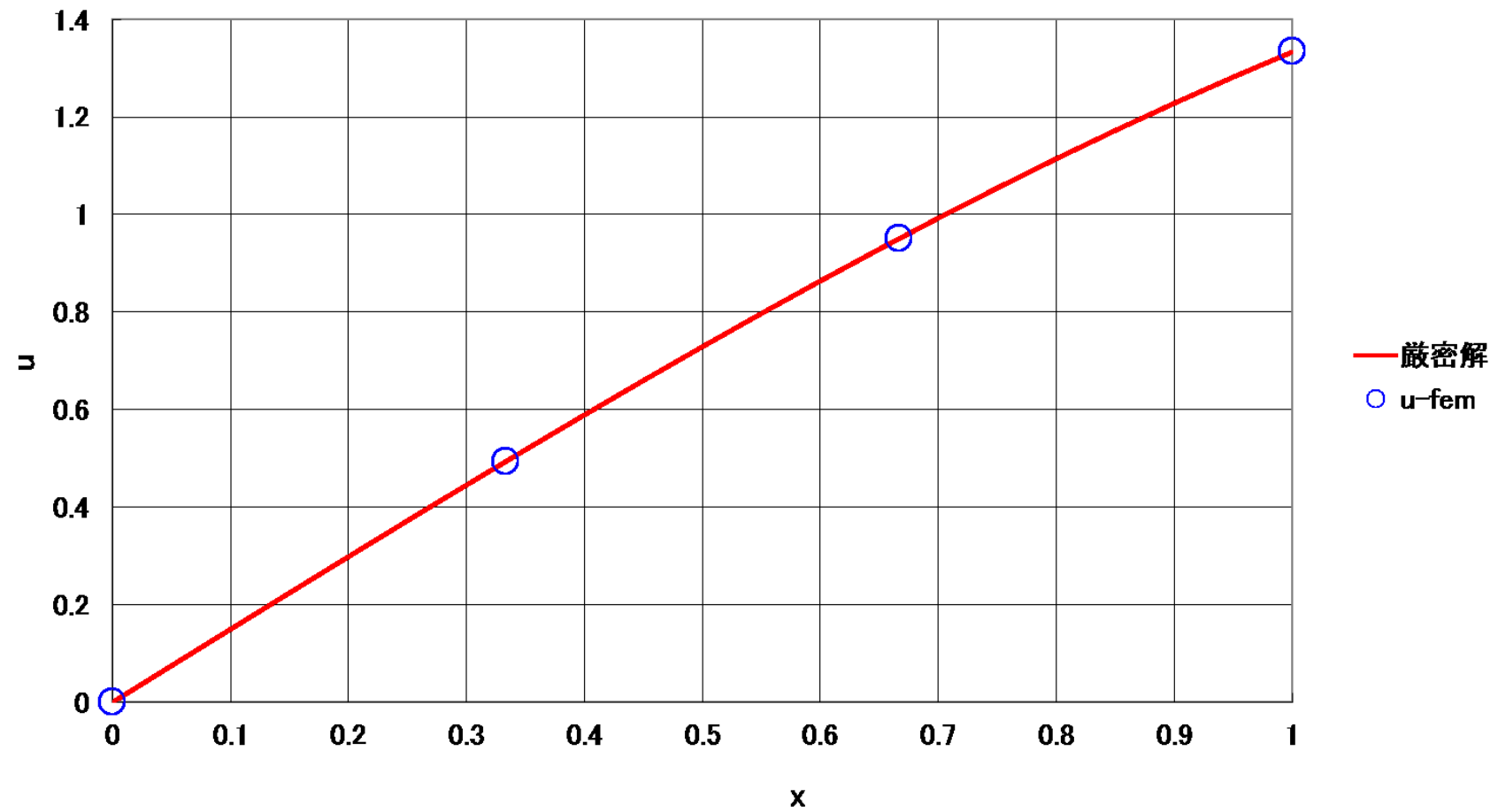
ここで、厳密解と比較すると以下のようになる。

解の比較

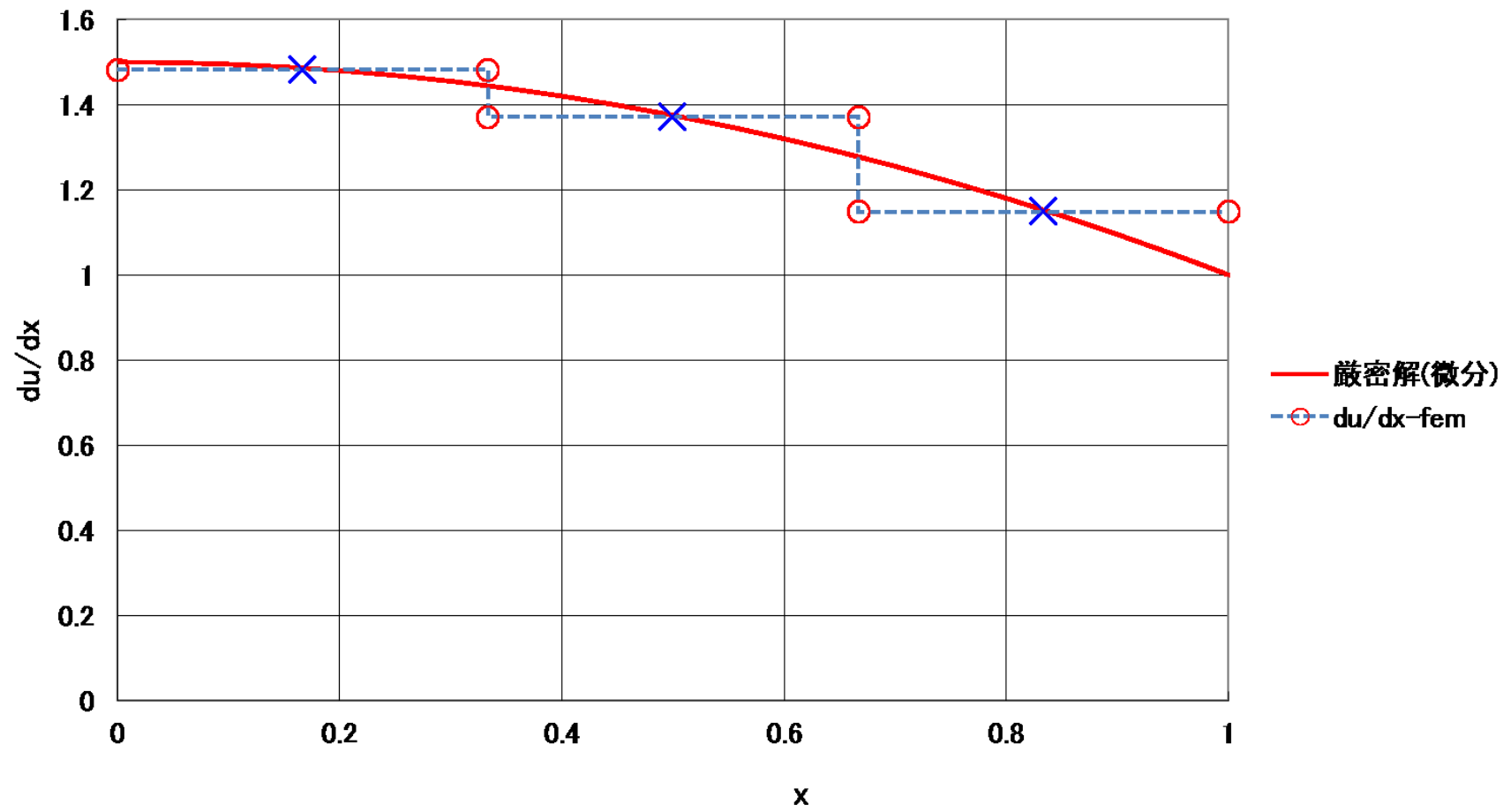
位置 (x)	有限要素解	厳密解
$u_1(0)$	0	0
$u_2(1/3)$	40/81	40/81
$u_3(2/3)$	77/81	77/81
$u_4(1)$	4/3	4/3

偶然かも知れないが、有限要素解と厳密解は一致している。
微分は直線補間であるために要素中央で見れば一致している。

厳密解とFEMの比較 $x-u$



厳密解とFEMの比較 $x-du/dx$



5. ガラーキン法のまとめ

(1) 基礎方程式を決める

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + f(x) = 0$$

$$\text{例題：} \frac{d^2 u}{dx^2} + x = 0$$

(2) 試行関数を決める

$$\tilde{u} = a_1 \phi_1(x) + a_2 \phi_2(x) + \cdots + a_n \phi_n(x)$$

$$\text{例題：} \tilde{u} = a_1 x + a_2 x^2$$

(3) 基礎方程式に重み関数をかけて積分して 0 になる式を作る。

$$\int_0^1 \left\{ \frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} + f(x) \right\} \phi_i(x) dx = 0$$

$$\int_0^1 \left\{ \frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} + x \right\} x dx = 0$$

$$\text{例題：} \int_0^1 \left\{ \frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} + x \right\} x^2 dx = 0$$

(4) 部分積分して整理する。

$$[K]\{a\} = \{F\}$$

$$K_{ij} = \int_0^1 \frac{d\phi_i(x)}{dx} \frac{d\phi_j(x)}{dx} dx$$

$$F_i = \int_0^1 f(x) \phi_i(x) dx + \frac{d\tilde{u}}{dx}(1) \phi(1) - \frac{d\tilde{u}}{dx}(0) \phi(0)$$

$$K_{11} = \int_0^1 \frac{d(x)}{dx} \frac{d(x)}{dx} dx \quad K_{12} = \int_0^1 \frac{d(x)}{dx} \frac{d(x^2)}{dx} dx$$

例題： $\quad = 1 \quad , \quad = 1$

$$K_{21} = \int_0^1 \frac{d(x^2)}{dx} \frac{d(x)}{dx} dx \quad K_{22} = \int_0^1 \frac{d(x^2)}{dx} \frac{d(x^2)}{dx} dx$$

$$= 1 \quad , \quad = \frac{4}{3}$$

$$F_1 = \int_0^1 x \cdot x dx + 1 \times 1 - 1 \times a_1 \quad F_2 = \int_0^1 x \cdot x^2 dx + 1 \times 1 - a_1 \times 0$$

$$= \frac{4}{3} \quad , \quad = \frac{5}{4}$$

(5) 行列を組み立てる。

$$[K]\{a\} = \{F\}$$

$$\text{例題 : } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 5/4 \end{pmatrix}$$

(6) 行列を解く

$$\{a\} = [K]^{-1} \{F\}$$

$$\text{例題 : } \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4/3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4/3 \\ 5/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{12} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{u} = \frac{19}{12}x - \frac{1}{4}x^2$$